Kapazitätsmessungen an Spulen.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der
II. Sektion der Hohen Philosophischen Fakultät
der
Königlich Bayerischen Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt am 1. Juli 1911 von

Wilhelm Hüter.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1912.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545821_0034

Meiner Mutter
und dem Andenken meines Vaters
gewidmet!

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erstes Kapitel.

Einleitung und Problemstellung.

§ 1. Die Oberflächenladung bei stromführenden Leitern; die Kapazität von Spulen 1
§ 2. Bisherige experimentelle Arbeiten über Spulenkapazität 4
§ 3. Der Phasenfaktor bifilarer Spulen; Prinzip seiner Messung . . . 7
§ 4. Übersicht und Ergebnisse der Untersuchung 11

Zweites Kapitel.

Allgemeines zu den Messungen.

§ 5. Apparate 13
§ 6. Die Versuchsanordnung 18
§ 7. Hilfsmessungen I 20
§ 8. Gang einer Messung des Phasenfaktors 25
§ 9. Beobachtungen und Ausrechnung in einem Einzelfall 27
§ 10. Bemerkungen zur angewandten Methode 33
§ 11. Hilfsmessungen II 38

Drittes Kapitel.

Messungen des Phasenfaktors.

§ 12. Abhängigkeit von Drahtlänge und spezifischem Widerstand . . 39
§ 13. Einfluß des Windungsabstandes 43
§ 14. Einfluß des Dielektrikums zwischen den Windungen 45
§ 15. Diskussion der Resultate 47

Erstes Kapitel.

Einleitung und Problemstellung.

§ 1.

Die Oberflächenladung bei stromführenden Leitern; die Kapazität von Spulen.

Im stationären Fall reduzieren sich die Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in der Bezeichnungsweise der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften[1]) auf:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{J} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E};$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Der stationäre Strom fließe durch einen linearen Leiter, etwa einen Metalldraht. Bildet man von $\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}$ die Rotation, so ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{J} = \sigma \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

wegen (2). Hieraus folgt, daß $\mathfrak{J}$ sich als Gradient eines Potentials darstellen läßt:

$$\mathfrak{J} = - \operatorname{grad} \varphi.$$

Der normale Abfall an der Leiteroberfläche ist $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, da keine Elektrizität in den Nichtleiter austritt; in diesem ist wegen $\sigma = 0$ auch $\mathfrak{J} = 0$ und daher $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$, weiter aber nach (2) $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$. $\mathfrak{E}$ ist also im Nichtleiter wirbelfrei verteilt, also:

$$\mathfrak{E} = - \operatorname{grad} \Phi.$$

Die Quellen dieses Potentialfeldes liegen auf der Oberfläche des Leiters. Als Grenzbedingung gilt die Gleichheit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$. An der Innenseite ist diese:

$$\mathfrak{E}_i = \frac{\mathfrak{J}}{\sigma} = - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

an der Außenseite:

$$\mathfrak{E}_a = - \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$

[1]) vgl. den Artikel von H. A. Lorentz, Maxwellsche Theorie V, 13.

also ist die Grenzbedingung:

$$\Phi = \frac{\varphi}{\sigma} + \text{const.}$$

Man hat daher auch im Falle des stationären Stromes um den stromführenden Leiter ein elektrisches Feld neben dem durch die erste Maxwellsche Gleichung (1) bedingten magnetischen Feld. Das elektrische Feld rührt her von der Ladung der Oberfläche des stromführenden Leiters; denn ein Sprung in der elektrischen Feldstärke bedeutet die Existenz von Elektrizität. Die in der letzten Gleichung auftretende Integrationskonstante ist bekannt, falls man den Potentialwert für irgendeinen Punkt als gegeben annimmt (bei Erdung gleich Null setzt).

Die mit jedem Strom notwendig verknüpften ganz bestimmten Oberflächenladungen des Leiters sind gewöhnlich im Vergleich zu der großen Elektrizitätsmenge, die durch den Draht fließt, verschwindend klein; daher macht jene sich auch meist nicht bemerkbar. Man nennt die Eigenschaft der Leiter, unter Einwirkung elektrischer Spannungen eine statische Ladung aufzunehmen, die Kapazität des Leiters.[1])

Hat man es mit veränderlichen Strömen zu tun, so existiert ein skalares elektrisches Potential für $\mathfrak{E}$ in Strenge nicht mehr. Die frühere Bestimmung von $\mathfrak{E}$ wird aber näherungsweise richtig, wenn man die von dem veränderlichen magnetischen Feld erzeugten elektrischen Kräfte vernachlässigt.[2]) Die genauere Untersuchung zeigt, daß dies bei den quasistationären Strömen durchaus zulässig ist und daß die Kraftlinien des äußeren elektrischen Feldes noch auf der Leiteroberfläche senkrecht stehen. Erst wenn man zu sehr hohen Frequenzen übergeht (Drahtwellen), tritt eine Neigung jener Kraftlinien ein, eine Folge des nicht mehr zu vernachlässigenden Verschiebungsstromes im Dielektrikum. Da weiter bei diesen schnellen elektrischen Schwingungen die Stromlinien nach der Oberfläche gedrängt werden, der Widerstand außerordentlich vergrößert und der Strom im Draht sehr klein wird, so ist im Gegensatz zum stationären Fall und dem technischen Wechselstrom die Oberflächenladung nicht mehr klein gegen die durch den Leitungsstrom bewegte Elektritzität; jene wird diese sogar um so mehr überwiegen, je höher die Schwingungszahl ist. Bei den hochfrequenten Strömen ist daher die Kapazität nicht mehr wie bei Gleichstrom und technischem Wechselstrom eine Korrektionsgröße neben Widerstand und Selbst-

[1]) Kohlrausch u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte S. 68.
[2]) vgl. P. Debye, Enz. d. math. Wissensch. V, 17 S. 441.

induktion, sondern Kapazität und Selbstinduktion sind hier die die in erster Linie charakteristischen Größen, die den Schwingungsvorgang bestimmen und überhaupt möglich machen. Dagegen spielt der Widerstand eine zwar nicht unwichtige, aber doch mehr untergeordnete Rolle und hat sie sozusagen mit der Kapazität bei Gleichstrom und technischem Wechselstrom getauscht.

Ein Fall, in dem auch bei Wechselstrom niedriger Frequenz die Ladung der Oberfläche sich bemerkbar macht, ist derjenige der Kapazität von Spulen. Die verhältnismäßig starke Vergrößerung der Ladung hat hier zwei Gründe: Einmal kommt sie dadurch zustande, daß zwischen neben- und übereinanderliegenden Windungen der Spule je nach Art der Wicklung erhebliche Spannungen vorhanden sein können, dann aber liegen diese Windungen meist sehr nahe zusammen.

Um diese Verhältnisse an einem besonderen Beispiel zu erörtern, wähle ich den von mir untersuchten Fall der einschichtigen bifilaren Spule. Deren Wicklungsart ist die folgende: Ein nicht zu kleines Stück eines besponnenen Drahtes wird in der Mitte geknickt und dann als doppelter Draht so auf den Spulenkern gewickelt, daß sich die Drahthälften niemals kreuzen, sondern stets genau parallel zueinander laufen. Die Drahthälften haben von der Knickstelle an bis zum entgegengesetzten Spulenende stets wachsende Potentialdifferenzen gegeneinander, die in gleichem Maße wachsende Ladungen auf den Drahtoberflächen verursachen; diese sind aber um so größer, je kleiner der Abstand der Drahtachsen ist. Hier kann man zur Erläuterung die Kapazität zweier kurzgeschlossener paralleler Drähte heranziehen, die sich theoretisch leicht berechnen läßt.[1]) Bei den bifilaren Spulen tritt demgegenüber die Komplikation auf, daß jeder Draht gegen seine beiden Nachbardrähte Kapazität hat.

Bei gewöhnlich gewickelten Spulen mit einer Schicht treten auch Kapazitätswirkungen auf; doch sind diese verschwindend klein, denn die Spannung zwischen aufeinanderliegenden Windungen ist gering. Praktisch kommt diese Kapazität, immer kleine Frequenz vorausgesetzt, wohl nie in Betracht, da man auf große Selbstinduktion geschaltet hat und daher die magnetische Energie die äußere elektrische bedeutend überwiegt.

Anders wird es bei zwei- und mehrschichtigen Spulen; hier treten zwar in derselben Einzelschicht die gleichen geringen Wirkungen auf wie vorher, jedoch bestehen jetzt zwischen den einzelnen Schichten größere Spannungen, die von der Ver-

[1]) vgl. S. 34.

bindungsstelle zweier solcher bis zum entgegengesetzten Ende wachsen. Der Grund dafür ist der, daß zwischen gegenüberliegenden Windungen verschiedener Lagen um so größere Widerstände sich befinden, je weiter sie von dem Verbindungspunkt entfernt sind. Dies gilt sowohl für die Spulen mit großer Selbstinduktion, in denen in verschiedenen Schichten die Stromrichtung die gleiche ist, als auch für diejenigen mit geringer Selbstinduktion, also entgegengesetzter Stromrichtung in aufeinanderfolgenden Lagen, der sogen. Chaperonschen Wicklung (§ 2).

§ 2.

Bisherige experimentelle Arbeiten über Spulenkapazität.

F. Kohlrausch[1]) fand im Jahre 1885, daß in der Wheatstoneschen Wechselstrombrücke beim Vergleich bifilar gewickelter größerer Widerstände sich ein Telephon statt auf Null nur auf ein Minimum einstellen läßt; er führte dies auf die Ladungskapazität zurück. Um die Kapazität bifilarer Rheostatenwiderstände zu verringern, schlug Chaperon[1]) 1889 die schon erwähnte Art der Wicklung vor, die beim Arbeiten mit Wechselstrom bis zu hohen Widerstandswerten sich als sehr brauchbar erwiesen hat.

Von M. Wien[1]) ist dann 1891 die Kapazität von Selbstinduktionsspulen zuerst gemessen worden. Er nimmt an, daß die Spule mit Selbstinduktion und verteilter Kapazität zu ersetzen ist durch eine Spule mit reiner Selbstinduktion und einer ihr parallel geschalteten Kapazität (§ 3). Untersucht werden in der Wheatstoneschen Brücke zwei Selbstinduktionsspulen, von denen nur die eine merkliche Kapazität hat; beide sind in aneinander stoßende Zweige geschaltet, die beiden anderen bestehen aus reinen Widerständen. Das Nullinstrument ist ein M. Wiensches optisches Telephon, die Stromquelle ein Saitenunterbrecher, dessen Schwingungszahl auf das optische Telephon und eine Stimmgabel von 512 Schwingungen pro Sekunde abgestimmt wurde.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt, daß die Gleichstrombedingung für Wechselstrom nicht erhalten bleibt. Wien schloß aus einer erhaltenen Nullpunktsverschiebung auf die Kapazität und fand, daß diese bei einfach gewickelten Spulen von sehr vielen Windungen aus dünnem Draht merklich war. Bei Spulen, die nach Art der bifilaren aus zwei Drahthälften bestanden, in denen der Strom aber in gleicher Richtung floß, die also große Selbstinduktion hatten, war die Kapazität noch

[1]) vgl. das Literaturverzeichnis auf S. 6.

größer. Die gefundenen ziemlich großen Kapazitäten sind nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. M. Wien auffällig. Vielleicht haben hierbei damals noch unbekannte Fehlerquellen (der Dolezaleksche Skineffekt) mitgespielt.

In einem Referat über die in der Reichsanstalt üblichen Meßmethoden der Selbstinduktionsnormalen hat E. Orlich[2]) 1903 gelegentliche Angaben über die Bestimmung der Kapazität von 1 Henry-Normalen gemacht. Für deren Selbstinduktion L ergab sich eine Abhängigkeit von der Wechselzahl, die auf die Kapazität C zu schieben ist. Aus drei Messungen bei verschiedener Frequenz wurde C berechnet.

Dolezalek[1]) fand 1903 bei höheren Wechselzahlen (> 500) die bekannte Widerstandserhöhung von Spulen, die mit massivem Draht bewickelt sind. Sie hat ihren Grund in der Verdrängung der Stromlinien nach der Innenseite der Spule wegen der Anhäufung des magnetischen Feldes im Innern. Dieser Skineffekt hat sich bei den Messungen von Wien und Orlich sicher bemerkbar gemacht.

Auch wenn man die Widerstandserhöhung bei den Selbstinduktionsnormalen durch Verwendung von Litzendraht vermeidet, treten doch noch Fehlerquellen auf, die Giebe[1]) entdeckt hat. Geht man, um den Wert der Spulenkapazität zu messen, von kleinen zu großen Wechselzahlen über, so ergibt sich für die Einstellung des Schleifkontakts keine merkliche Änderung, jedoch muß man zur Herstellung des Gleichgewichts das Widerstandsverhältnis der Zweige, die die Normalen enthalten, erheblich ändern (12 %). Der Unterschied läßt sich nicht entfernt auf einen Einfluß der Kapazität schieben; er ist vielmehr auf die Selbstinduktion des Schleifdrahtes zurückzuführen. Diese kommt bei hoher Frequenz sehr in Betracht, wie man leicht durch Aufstellung der genaueren Gleichgewichtsbedingungen sieht, wenn man dabei auch den Zweigen des Schleifdrahts Selbstinduktion beilegt.

Giebe hat, um die zahlenmäßige Berechnung der Selbstinduktion dieser Zweige durchführen zu können, die Bifilarbrücke konstruiert, deren Selbstinduktion theoretisch bekannt ist. Die Messungen sind bei drei verschiedenen Frequenzen (50, 2040, 3035) vorgenommen und die Widerstände nachher mit Gleichstrom gemessen worden. Es zeigte sich, daß die früheren großen Unterschiede verschwinden, daß aber immer noch das Verhältnis der Widerstände der Bifilarbrücke mit wachsender Wechselzahl zunimmt. Dies ist auf die merkliche Eigenkapazität der größeren

[1]) vgl. S. 6.

Normalen zurückzuführen, denn durch jene wird ihr „wirksamer“ Widerstand vergrößert (§ 3).

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat Giebe[1]) seine früheren Untersuchungen sehr erweitert und dabei gefunden, daß die Kapazität der („unifilaren“) Selbstinduktionsnormalen für große Frequenzbereiche (50 bis 4800) von der Wechselzahl unabhängig ist. Er legt jetzt beiden Normalen Kapazität bei und kann aus Messungen bei zwei verschiedenen Frequenzen die Größe $C_1 - \frac{C_2}{10}$ messen, wo C_1 die Kapazität der größeren, C_2 die der kleineren Normalen bedeutet. Die Kapazität der kleinsten Normalen 10^5 cm ist im Vergleich mit der 10^6 cm zu vernachlässigen. Giebe kann durch stufenweise Vergleichung die Kapazität aller größeren Normalen von 10^6 cm ab bestimmen. Fehlerquellen wie Erdkapazität und gegenseitige Kapazität wurden in der sehr empfindlichen Anordnung vermieden. Die Messungen ergaben eine recht gute Übereinstimmung mit den von R. Lindemann[1]) bei hochfrequenten Strömen erhaltenen Resultaten, der die Kapazität derselben Selbstinduktionsnormalen aus ihrer Eigenfrequenz berechnete.

P. Drude[2]) hat schon 1902 die Eigenschwingungsdauer von Spulen durch Resonanz mit einem mit ihr gekoppelten Paralleldrahtsystem gemessen und dabei seine theoretischen Ableitungen über Spulenkapazität bestätigt gefunden. Mit Hilfe elektrischer Schwingungen ist auch von Diesselhorst (s. unten S. 7) die Kapazität von Spulen aus der Eigenfrequenz bestimmt worden, und auf ähnlichen Grundlagen beruhen die erwähnten Resultate von Lindemann.

Die besprochenen Arbeiten sind die wichtigeren über diesen Gegenstand und wurden ihrem Wert für unsere Untersuchung gemäß behandelt. Ein ausführlicheres Literaturverzeichnis wird noch im folgenden gegeben:

F. Kohlrausch, Ann. 26, 1885 S. 171/72.
Bouty u. Foussereau, Journ. d. Phys. 4, 1885 S. 419.
Chaperon, C. r. 108, 1889 S. 799.
Elsas, Ann. 44, 1891 S. 666.
M. Wien, Ann. 44, 1891 S. 711.
F. Kohlrausch, Ann. 44, 1893 S. 225.
Kimball Proc. Phys. Soc. London 13, 1895 S. 480.
J. Cauro, C. r. 120, 1895 S. 308—311 (Beibl. d. Ann. 19, 1895).
P. Drude, Ann. 9, 1902 S. 292.
E. Orlich, El.-Techn. Ztschr. 24, 1903 S. 504.
Dolezalek, Ann. 12, 1903 S. 1142.

[1]) vgl. S. 7.
[2]) s. u.

Giebe, Ann. 24, 1907 S. 941.
Diesselhorst, Jahrb. f. drahtl. Telegr. 1, 1907 S. 262.
Taylor u. Williams, Phys. Rev. 26, 1908 S. 417.
E. Orlich, Verh. d. d. phys. Ges., Dez. 1910.
Giebe, Ztschr. f. Instr.-K. 1911 Heft 1, 2.
R. Lindemann, Verh. d. d. phys. Ges. 22, 1910 S. 572.
Außerdem das Lehrbuch von
E. Orlich, Kapazität u. Induktivität, Braunschweig 1909.

§ 3.

Der Phasenfaktor bifilarer Spulen; Prinzip seiner Messung.

Der Zweck dieser Arbeit war der, für theoretische Untersuchungen über die Kapazität der Spulen experimentell Material zu liefern.[1]) Einschichtige Spulen bei gewöhnlicher Wicklungsweise haben, wie schon gesagt, eine sehr kleine Kapazität. Es scheint, daß für Spulen aus massivem Draht, die auf große Selbstinduktion gewickelt sind, der Einfluß der Kapazität bei kleiner Frequenz nicht einwandfrei festzustellen ist.[2]) Deshalb sind bifilar einschichtige Spulen untersucht worden, bei denen man den Vorteil geringer magnetischer Energie mit dem einer verhältnismäßig großen elektrischen Energie oder anders kleine Selbstinduktion L mit ziemlich großer Kapazität C verbindet.

Die Wirkungsweise einer Spule bei Wechselstrom kann man nach Max Wien[3]) so auffassen, daß sie aus einem Widerstand mit Selbstinduktion besteht, dem ein Kondensator parallel geschaltet ist; dieser ersetzt die Wirkungsweise der verteilten Kapazität. Jene Annahme ist auf theoretischem Wege durch die Untersuchungen von W. Lenz[4]) für gewöhnliche (unifilare) und bifilare Spulen bestätigt worden.

Für den Widerstandsoperator[5]) W einer bifilaren Spule ergibt sich aus dem auch für Wechselstrom gültigen Kirchhoffschen Gesetz der Parallelschaltung (vgl. Fig. 1)

---

[1]) Eine Übersicht der bisherigen theor. Arbeit gibt P. Debye, Enz. d. math. W. V, 17 S. 440. Hinzuzufügen ist die Diss. von W. Lenz, Über das elmagn. Wechselfeld von Spulen, München 1911; für bifilare Spulen werden die Untersuchungen von Lenz nächstens durchgeführt.

[2]) Die Kap. vermehrt Widerst. u. Selbstind., u. zwar gehen die Vergrößerungen quadratisch mit der Frequenz (vgl. Gl. (3) u. S. 8). Die für die Messung der Kap. günstige Erhöhung der Wechselzahl ruft aber Skineffekt, d. h. ebenfalls Widerstandserhöhung hervor; beide sind wohl nicht voneinander zu trennen.

[3]) M. Wien, Ann. d. Phys. 44, 1891 S. 689.

[4]) W. Lenz, Diss. München 1911, s. o. Anm. 1.

[5]) Über Widerstandsoperatoren vgl. M. Wien a. a. O. S. 690; Orlich, Kap. u. Ind. S. 99.

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w + i\omega L} + i\omega C, \tag{1}$$

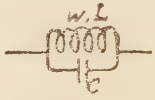

Fig. 1.

wo $\omega = 2\pi n$ die Kreisfrequenz (nach Orlich, Giebe) ist, d. h. die Periodenzahl in 2π sec; aus Gl. (1) folgt:

$$W = \frac{w + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega wC} \tag{2}$$

Da die Kapazität von Spulen immer eine kleine Größe ist, kann man für W schreiben:

$$W = (w + i\omega L)(1 - i\omega wC + \omega^2 LC),$$

$$W = w(1 + 2\omega^2 LC) + i\omega L\left(1 + \omega^2 LC - w^2 \frac{C}{L}\right). \tag{3}$$

Der Widerstand ist durch die Kapazität scheinbar vergrößert, die Selbstinduktion ist ebenfalls durch sie geändert. Das letzte Glied darf nicht unter allen Umständen weggelassen werden, wie es allerdings bei den Selbstinduktionsnormalen[1]) berechtigt ist.

Bei den bifilar einschichtigen Spulen, die hier genauer untersucht werden, war die Selbstinduktion von der Größenordnung 10^{-5} Henry, die Kapazität von der Größenordnung 10^{-9} F. Soll also ein Einfluß dieser beiden auf den Widerstand bemerkbar sein, so müßte man (wegen $2\omega^2 LC$) schon zu sehr hohen Wechselzahlen übergehen. Die benutzte Schwingungszahl war etwa $n = 480$, daher beträgt das Glied $2\omega^2 LC$ nur 10^{-7} und kommt deshalb neben dem andern reellen Teil 1 nicht in Betracht. Das zweite Glied im Faktor von $i\omega L$, d. h. $\omega^2 LC$, ist aus dem gleichen Grund zu streichen, und es bleibt für den Widerstandsoperator der bifilaren Spule:

$$W = w + i\omega L\left(1 - w^2 \frac{L}{C}\right)$$

$$\begin{cases} W = w\left\{1 + i\omega\left(\frac{L}{w} - wC\right)\right\} \\ W = w(1 + i\omega\varphi) \end{cases} \tag{4}$$

[1]) vgl. Orlich, Kap. u. Ind. S. 186 (13).

Diese Zerlegung des Operators in einen reellen und imaginären Teil ist unter allen Umständen zulässig und praktisch, hängt also an sich nicht von den gemachten Vernachlässigungen und Voraussetzungen ab. Die letzteren kommen erst in Betracht, wenn man φ durch w, L, C ausdrückt und unter w den Gleichstromwiderstand ($\omega = 0$) versteht.

Für einen beliebigen Widerstandsoperator kann man, da er im allgemeinen eine komplexe Größe ist, $W = re^{i\psi}$ setzen. Wird ψ klein, so ist $W = r(1 + i\psi)$; man erhält hieraus die Gleichung (4), wenn $w = r$ und $\psi = \omega\varphi$ substituiert wird. Die Größe φ gibt dort je nach ihrem Vorzeichen an, ob die Phase des Stromes gegen die Spannung nach- oder voraneilt. Daher soll φ als der „Phasenfaktor" der bifilaren Spule bezeichnet werden; er ist definiert durch:

$$\varphi = \frac{L}{w} - w\,C \tag{5}$$

und wird positiv oder negativ, je nachdem das erste oder das zweite Glied überwiegt. Eine ähnliche Bezeichnung findet sich bei Orlich,[1]) wo bei Widerständen die „Phasenabweichung" eingeführt wird und bald $\varphi = \frac{\omega L}{w}$, bald $\varphi = -\omega\,Cw$ gesetzt wird. Es scheint aber die Definition des Phasenfaktors besser zu sein, da stets beides, Selbstinduktion und Kapazität, vorhanden ist, ferner diese Größe als unabhängig von der Schwingungszahl angesehen werden kann[2]) und bei der Aufstellung des Widerstandsoperators zweckmäßig ist. Das Orlichsche φ ist ω mal größer als der Phasenfaktor und entspricht unserm obigen ψ.

Da $\omega\varphi$ eine reine Zahl ist, ergibt sich für φ die Dimension einer Zeit:

$$[\varphi] = \text{sec.}$$

Für seinen ersten Bestandteil $\frac{L}{w}$ ist daher schon seit langem der Ausdruck „Zeitkonstante" gebraucht worden.

Bei den folgenden Untersuchungen kam es darauf an, φ experimentell für bifilare Spulen zu bestimmen und seine Abhängigkeit von der Länge des aufgewundenen Drahtes zu untersuchen. Das Prinzip der Messung soll gleich hier angegeben werden, während experimentelle Einzelheiten und die Resultate in spätern Kapiteln folgen.

---

[1]) Orlich, Kap. u. Ind. S. 193/94.
[2]) Für nicht zu hohe Wechselzahlen natürlich.

Die Messung von φ wurde in einer Wheatstoneschen Wechselstrombrücke vorgenommen; da φ eine kleine Größe (10^{-6} bis 10^{-8} sec) ist, war es notwendig, auch die hier in Betracht kommenden Selbstinduktionen aller andern Zweige zu kennen. Deshalb wurde als „Schleifdraht“ die von Giebe angegebene Bifilarbrücke[1]) benutzt, die aus zwei parallelen Drähten besteht, deren Selbstinduktion sich theoretisch berechnen läßt. Die Bifilarbrücke bildete die Zweige I und II (vgl. Fig. 2); in den Zweig III

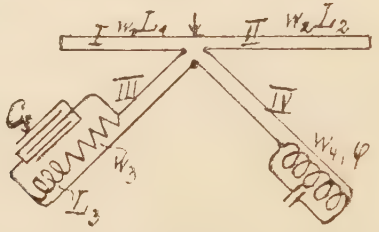

Fig. 2.

kam ein möglichst „reiner“ Widerstand w_3, meist noch eine Selbstinduktion L_3, beiden war eine veränderliche Kapazität C_3 parallel geschaltet. In dem Zweig IV befand sich die Bifilarspule w_4, φ. Die Widerstandsoperatoren der einzelnen Zweige sind:

$$W_1 = w_1 + i\omega L_1;\quad W_2 = w_2 + i\omega L_2$$

$$W_3 = w_3 \left\{1 + i\omega \left(\frac{L_3}{w_3} - w_3 C_3\right)\right\}$$

$$W_4 = w_4 (1 + i\omega\varphi)$$

wo also nach Gl. (5) $\varphi = \dfrac{L_4}{w_4} - w_4 C_4$ bedeutet. Es ist berechtigt, den Widerstandsoperator W_3 in Phasenfaktorenform zu schreiben, da die zur Messung von φ in Zweig III benutzten Selbstinduktionen und Kapazitäten von solcher Größe waren, daß $\omega^2 LC$ dabei zu vernachlässigen ist. Dies folgt aus Gl. (2), in der man im Nenner stets $\omega^2 LC$ gegen 1 streichen kann, da man sich immer weit entfernt von der Eigenschwingung des geschlossenen Kreises III befindet, für die $\omega^2 LC = 1$ würde.

Die Gleichgewichtsbedingung für die Brücke ist:

$$W_1 W_4 = W_2 W_3, \tag{6}$$

[1]) Giebe, Ann. d. Phys. 24, 1907 S. 941 ff.

d. h.

$$(6') \quad (w_1 + i\omega L_1)\, w_4 (1 + i\omega\varphi) = (w_2 + i\omega L_2)\, w_3 \left\{1 + i\omega\left(\frac{L_3}{w_3} - w_3 C_3\right)\right\}.$$

Die reellen Teile, nach dem Ausmultiplizieren gleichgesetzt, ergeben:

$$w_1 w_4 - w^2 L_1 w_4 \varphi = w_2 w_3 - \omega^2 L_2 L_3 + \omega^2 w_3^2 L_2 C_3 .$$

Hierin sind die von ω^2 abhängigen Glieder wegen der Kleinheit von L_1, L_2 (10^{-6} H), C_3 (10^{-9} F) und φ (10^{-6} bis 10^{-8} sec) zu vernachlässigen: daher bleibt auch für Wechselstrom die Gleichstrombedingung gültig:

$$(7) \qquad w_1 w_4 = w_2 w_3 .$$

Die Gleichsetzung der imaginären Bestandteile der Gleichung (6') ergibt:

$$w_4 L_1 + w_1 w_4 \varphi = L_2 w_3 + w_2 L_3 - w_2 w_3^2 C_3 .$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der ersten Gleichgewichtsbedingung (7) für φ:

$$(8) \qquad \underline{\varphi = \frac{L_2}{w_2} + \frac{L_3}{w_3} - w_3 C_3 - \frac{L_1}{w_1}} .$$

Hierin sind die Widerstände $w_1 w_2 w_3$ durch Gleichstrom zu bestimmen, L_1, L_2 sind berechenbar, oder wenn nötig, zu messen, L_3 und C_3 sind bekannt oder können nachträglich festgestellt werden.

§ 4.

Übersicht und Ergebnisse der Untersuchung.

Der Zweck dieser Arbeit ist schon zu Anfang des vorigen Paragraphen angegeben worden; sie behandelt im wesentlichen die Messung des vorher eingeführten Phasenfaktors.

Im nächsten Kapitel wird die bis jetzt nur schematisch angeführte Versuchsanordnung und die benutzten Apparate genauer beschrieben. Ferner kommen Hilfsmessungen zur Sprache, die zur Bestimmung des Phasenfaktors notwendig waren und die bezweckten, sämtliche verwandten Selbstinduktionen und Kapazitäten auf eine bestimmte Grundeinheit zu beziehen. Dann wird die Art der Messung besprochen und ein Spezialfall als Beispiel vollständig durchgeführt. Hieran reihen sich Bemerkungen zu der angewandten Methode: über ihre Empfindlichkeit und Zweckmäßigkeit, über die Genauigkeit der Messungen, über die Fehlerquellen und deren Beseitigung.

Die Messungen selbst sind im dritten (letzten) Kapitel mitgeteilt. Es wurden Untersuchungen angestellt über den Einfluß, den der spezifische Widerstand, die Drahtlänge, der Windungsabstand und das Dielektrikum zwischen den Windungen auf den Phasenfaktor ausüben. Zu diesem Zwecke sind bifilare Kupferspulen aus dünnem Draht (Durchmesser 0,1 mm blank, 0,13 mm besponnen) gewickelt worden. Um den Einfluß des spezifischen Widerstandes festzustellen, wurde φ für dieselbe Spule bei Zimmertemperatur und niedrigerer Temperatur (9°) gemessen; letztere wurde durch strömendes Wasser hervorgebracht, das durch die Doppelwand eines Hohlgefäßes lief, in das die Spule gehängt war. Bei der Abnahme der Drahtlänge ergab sich ein Übergang der φ von großen negativen Werten zu positiven. Trägt man diese Werte für einen bestimmten spezifischen Widerstand als Funktion des Gesamtwiderstandes, d. h. auch als Funktion der Drahtlänge auf, so erhält man für φ eine parabolische Kurve. Die andern noch untersuchten Fälle des abgeänderten Dielektrikums und des abgeänderten Windungsabstands können, wenn sie bei gleicher Temperatur gemessen waren, mit dieser Kurve verglichen werden. Man bekam so ein Bild davon, wie sich der Phasenfaktor durch die besonderen Fälle geändert hat, d. h. ob im positiven oder negativen Sinne. Dies mußte dann auf eine Zu- oder Abnahme der beiden Glieder $\frac{L}{w}$ und wC, durch die der Phasenfaktor definiert ist, geschoben werden. Schließlich wurde noch versucht, die Kapazität und die Selbstinduktion zu trennen unter der Voraussetzung von deren Unveränderlichkeit beim Übergang von höherer zu tieferer Temperatur. Da aber bei der Ausrechnung Differenzen auftreten, deren Größe wesentlich von der Genauigkeit der letzten Stellen der φ, in 10^{-9} sec ausgedrückt, abhängen, die aber nach der Art der Messung unsicher sein müssen, so kann die Trennung nur ein Bild des ungefähren Verlaufs von L und C längs der Spule geben. Man ist jedoch durch Eintragung des Fehlergebiets, wie es durch bestimmte Kombination der am meisten von den Mittelwerten abweichenden Einzelbeobachtungen von φ entsteht, immerhin in der Lage, einen Schluß über die Abhängigkeit der Kapazität und Selbstinduktion von der Drahtlänge ziehen zu können.

Während diese Trennung mehr theoretisches Interesse hat, ist das praktisch wichtige die Messung des Phasenfaktors selbst, denn dieser spielt bei der Verwendung der bifilaren Spulen bei technischem Wechselstrom allein eine Rolle. Durch seine Messungen hat sich ergeben, daß bei den bifilaren Spulen qualitativ die gleichen Verhältnisse sich ergeben wie bei einer bifilaren

einseitig kurzgeschlossenen Doppelleitung. Für diese läßt sich auf Grund theoretischer Überlegungen[1]) zeigen, daß bei kürzeren Drähten der Einfluß der Selbstinduktion, bei längeren Leitungen derjenige der Kapazität überwiegt; Zunahme des Widerstands steigert die Kapazitätswirkung und vermindert die der Selbstinduktion — gerade wie bei den bifilaren Spulen.

Zweites Kapitel.

Allgemeines zu den Messungen.

Wie schon in § 3 ausgeführt wurde, läßt sich der Phasenfaktor einer bifilaren Spule, der durch deren Konstanten w_4, L_4, C_4 definiert ist, zu $\varphi = \frac{L_4}{w_4} - w_4 C_4$[2]) mittels der Konstanten der übrigen Brückenzweige aus der folgenden Gleichung[3]) bestimmen:

$$\varphi = \frac{L_2}{w_2} + \frac{L_3}{w_3} - w_3 C_3 - \frac{L_1}{w_1}.$$

Die Bedeutung der rechtsstehenden Größen ist damals schon angegeben und aus der Fig. 2 leicht ersichtlich. In diesem Kapitel soll auseinandergesetzt werden, wie man allgemein auf Grund dieser Gleichung den Phasenfaktor bifilarer Spulen messen kann; die Meßresultate folgen erst im letzten Kapitel. Zunächst ist die Versuchsanordnung genauer mitzuteilen; wir beginnen daher mit einer Beschreibung der Apparate.

§ 5.

Apparate.

Der Wechselstromerzeuger war ein Saitenunterbrecher nach M. Wien, der durch vier Akkumulatoren angetrieben wurde. Der durch ihn unterbrochene Gleichstrom wurde in einem Transformator in wirklichen Wechselstrom verwandelt. Der Transformator bestand aus einem an einer Stelle aufgeschnittenen Kreisring von unterteiltem Eisen, auf dem vier etwa gleiche Spulen aus Kupferdraht nebeneinander aufgewickelt waren. Eine von diesen befand sich im Primärkreis des Unterbrechers, eine andere danebenliegende im Sekundärkreis der Meßanordnung.

---

[1]) E. Orlich, Kap. u. Ind. S. 132.
[2]) vgl. S. 9 Gl. (5).
[3]) vgl. S. 11 Gl. (8).

Der Primärkreis wurde meist von zwei, manchmal auch von drei Akkumulatoren gespeist.

Bei den Messungen wurde eine Bifilarbrücke benutzt, die im Prinzip mit der von Giebe[1]) angegebenen übereinstimmte. Es ist zum bessern Verständnis der späteren Mitteilungen wohl angebracht, eine genauere Beschreibung von ihr zu geben. Die Brücke war auf ein Holzgestell von prismatischer Form montiert: 1,50 m lang, 7,2 cm breit, 4 cm hoch (Fig. 3). In der Mitte befindet sich eine 7,2 cm lange, 6,5 cm breite, 1.3 cm hohe Hartgummiplatte P, die an den vier Ecken mit Messingschrauben, die ganz in ihr sitzen, an dem Holzbalken befestigt ist. In Fig. 3 tritt sie schlecht hervor wegen ihrer Kleinheit im Verhältnis zur Gesamtausdehnung der Brücke.

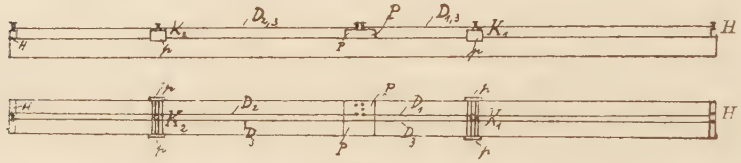

Fig. 3.

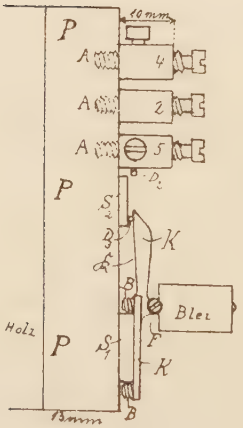

Fig. 4b.

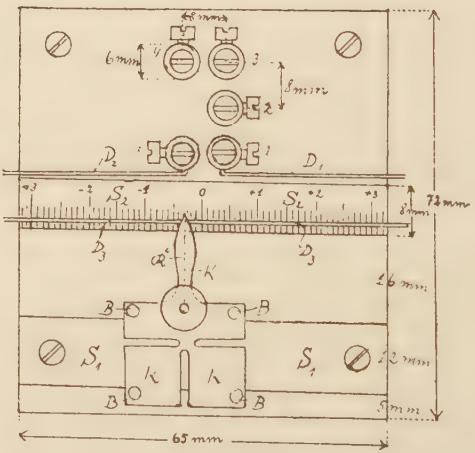

Fig. 4a.

Die vorstehende Fig. 4 gibt das Bild der Platte im Verhältnis 3 : 4, 4a den Grundriß, 4b den Aufriß von links. Die obere und untere Kante der Platte (in Fig. 4a) stimmt mit der

[1]) Ann. 24, 1907 S. 941; vgl. auch S. 5. Bei Giebe findet sich keine genauere Beschreibung.

Längsseite der Holzunterlage überein (s. Fig. 3). 5 mm vom untern Rand (Fig. 4 a) befindet sich eine Schiene aus Hartgummi $S_1 S_1$ von den Dimensionen 65×12×3 mm, in einer Entfernung von 16 mm davon eine zweite Hartgummischiene $S_2 S_2$ (65×8×2 mm). Sie ist mit einer in Millimeter geteilten Skala versehen, in der Mitte befindet sich Teilstrich O. Weiter nach oben sind fünf Messingzylinder (1, 2, 3, 4, 5) in der aus der Fig. 4 a ersichtlichen Anordnung eingeschraubt, so daß die Schraube (A in 4 b) ganz in der Hartgummiplatte sitzt. Jeder der Messingzylinder hat 10 mm Höhe, 6 mm Durchmesser und ist mit zwei Schraubenlöchern versehen; das eine befindet sich 4 mm von unten senkrecht zur Achse, das andere von oben her in der Richtung der Achse. In beide lassen sich kleinere Klemmschrauben mit dem Schraubenzieher festdrehen. Der Abstand zweier benachbarter Zylinder ist 8 mm mit Ausnahme von 4 und 5, bei denen er doppelt so groß ist.

An den Enden des Holzgestells (Fig. 3) sind Hartgummiprismen H H (7,2×1,3×1,3 cm) befestigt. Sie tragen im Abstand von 8 mm zwei Schrauben von gleicher Art wie 1—5 auf P. In die beiden der Skala zunächst gelegenen Klemmen 1 und 5, und zwar in die untern Löcher, sind Manganindrähte D_1 und D_2 (Fig. 3) eingeschraubt, die nach beiden Seiten zu den entsprechenden (d. h. in Fig. 3 den oberen) Schrauben von H H am Ende des Balkens führen. Die beiden noch übrigen Schrauben der äußeren Klötze sind durch einen einzigen Draht (D_3, D_3) verbunden; dieser liegt in der Mitte auf der Skala ($S_2 S_2$) (Fig. 4 a, b). Auf ihn drückt ein Schleifkontakt (K in 4 a, b), zu dessen Führung die eine Hartgummischiene ($S_1 S_1$) dient. Er ist aus einer 1,5 mm dicken Messingplatte gefertigt, die mit Einschnitten versehen ist. Zur Sicherung des Kontakts ist auf einem Zapfen ein Bleizylinder aufgesetzt (Fig. 4 b), der die untere Kante ℜ der Kontaktspitze auf den Draht D_3 preßt. Der Zapfen ist an seinem untern Ende durchbohrt; in dieses Loch kann ein biegsamer Draht, der zur Stromquelle oder zum Telephon führt, mit Hilfe der Schraube F befestigt werden, die gleichzeitig dem Bleizylinder als Stütze dient. Die vier Ecken der Messingplatte sind mit Schrauben (B) versehen, die das Heruntergleiten von der Schiene $S_1 S_1$ verhindern.

Der Schleifkontakt K dient nur zur Feineinstellung, größere Widerstandsänderungen werden durch zwei Kontakte K_1 K_2 (Fig. 3) vorgenommen, die auf dem Holzbalken verschoben werden können. Sie bestehen aus Hartgummiprismen (7,2×2,2 ×1,5 cm), an deren Schmalseiten zur Führung auf der Holzunterlage dünnere Hartgummiplatten (p, p in Fig. 3) angeschraubt

sind. Auf ihren oberen Seiten sind 6 mm breite, 2 mm hohe Messingstreifen mit einer darüberliegenden dünnen Messingfeder durch dieselben Schrauben befestigt. Zwischen beiden Metallteilen befinden sich die Drähte (z. B. bei K_1: D_1 und D_3); diese sind mit einer zwischen beiden befindlichen Handschraube durch die Feder auf die Messingunterlage zu drücken, wodurch die Drähte leitend verbunden sind.[1]) Es kann jetzt z. B. ein Strom von der Klemme 1 durch den Draht D_1, den Kontakt K_1, den Draht D_3 nach dem Schleifkontakt K bei P fließen (Fig. 3 und 4 a). Um den Abstand der Drähte konstant zu halten, dient eine mit Einschnitten versehene Hartgummiplatte, die an der Mitte der Innenseite von K_1, K_2 (nach P zu) aufgeschraubt wird. Auf den Holzbalken sind noch Maßstäbe aus festem Millimeterpapier geklebt, an denen man die Einstellung der Kontakte K_1, K_2 ablesen kann; die wirklich eingeschaltete Drahtlänge ist durch Korrektionen leicht zu finden, die von der Breite von K_1 und K_2 herrühren und von den Teilen der Drähte, die schon über der mittleren Platte P gelegen sind.

Die Widerstandsdrähte (D_1, D_2, D_3) waren bei den Messungen von φ 0,2 mm starke blanke Manganindrähte, bei andern auch solche vom Durchmesser 0,5 mm (§ 7).

Als Nullinstrumente bei Wechselstrom standen ein M. Wiensches Vibrationsgalvanometer und vier Telephone zur Verfügung. Von diesen wurde aber nur eins benutzt, da es die größte Empfindlichkeit hatte. Bei der Messung des Phasenfaktors wurde stets mit letzterem eingestellt, bei Hilfsmessungen aber auch mit dem Vibrationsgalvanometer.

Die variable Kapazität war ein Drehkondensator von Siemens & Halske, dessen drehbarer Teil aus 16, dessen fester aus 17 halbkreisförmigen 1 mm dicken Platten bestand. Zwei Platten des festen ebenso wie des beweglichen Teils hatten einen Abstand von etwa 3,5 mm. Der Radius der drehbaren Platten war ungefähr 8,0 cm, derjenige der festen 8,5 cm. Der Drehkondensator wurde mit reinem Paraffinöl gefüllt.

Von einem Satz vorhandener Glimmerkondensatoren von Edelmann (10^{-1} bis 10^{-3} MF) sind bei den Messungen von φ nur zwei benutzt worden, deren Sollwerte zu 10^{-2} MF und 10^{-3} MF angegeben waren.

Die benutzte Selbstinduktionsnormale war von Siemens & Halske und hatte den Wert 10^{-4} Henry und den Wider-

[1]) Einfache Federn, die nur an den Enden des Messingstreifens festgeschraubt waren (also ohne mittlere Handschraube), oder zweifache, von denen jede nur auf einem Draht schleifte, gaben keine genügend konstanten Kontakte.

stand 2,2 Ω. Ein im hiesigen Institut gebauter Selbstinduktionsvariator, dessen Bereich von etwa $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ bis $5 \cdot 10^{-5}$ Henry ging, bestand aus einer inneren festen und einer äußeren beweglichen Spule; die eine hatte 9,6 cm, die andere 10 cm Durchmesser. Auf jedem der Holzringe waren zehn Windungen aus Litzendraht (18×0,1 mm) aufgewickelt. Die Stellung der beiden Ringe gegeneinander wurde an einer Kreisteilung am Fuße des Instruments abgelesen; 360° entsprachen dabei 90 Teilstrichen.

Zur Messung von φ konnten bei Wechselstrom gewöhnliche Rheostatenwiderstände nicht verwandt werden, da sie stets Reste von Selbstinduktion und Kapazität haben. Praktisch frei sind hiervon die Kundtschen Widerstände, die deshalb benutzt wurden. Sie werden mit Platinierflüssigkeit auf einfache Glasröhren (10 cm lang, 7 mm dick) eingebrannt, welche in Klemmschrauben gespannt werden konnten, nachdem ihre Enden mit Stanniolblättern fest umwickelt waren. Die Schrauben saßen auf einem Paraffinklotz und waren so angeordnet, daß man die platinierten Röhren parallel zueinander befestigen konnte.

Für die Gleichstrommessungen wurden Reostaten benutzt: ein neuer Präzisionswiderstandskasten von S. H. mit dem Gesamtwiderstand 1000 Ω und zwei Rheostaten von Edelmann, von denen der eine im ganzen 2000 Ω, der andere (R_1 auf S. 18) 200 Ω hatte. Als Gleichstromnullinstrument diente bei der Aichung des Variators ein Galvanometer mittlerer Empfindlichkeit von Ruhstrat, bei den Messungen von φ ein Desprez-d'Arsonval-Instrument von S. H. mit einem Ayrtonschen Nebenschluß.

Die zu untersuchende Spule hing stets in einem doppelwandigen Blechgefäß, durch dessen Mantel Leitungswasser strömen konnte, das mittels Bleiröhren zu ihm hingeführt wurde. Der Hohlraum des Gefäßes hatte einen Durchmesser von 8,5 cm, eine Länge von etwa 50 cm und konnte durch einen Holzdeckel abgeschlossen werden. In diesem befand sich in der Mitte ein Loch, durch das ein isolierter Draht hindurchging, dessen oberes Ende an einem quergelegten Glasstäbchen befestigt war und an dessen unterem die Spule hing; dann noch zwei weitere Löcher seitlich davon, durch die mittels durchbohrter Korke zwei Thermometer in den Innenraum gesteckt wurden. Die Quecksilberkugel des einen befand sich am untern, die des andern etwas über dem obern Rande der Spule. Der Mantel des Gefäßes und der Holzdeckel waren mit Isolierwatte umgeben, um äußere Temperatureinflüsse von dem Innenraum abzuhalten.

Ein drittes Thermometer, das ebenso wie die beiden andern in

Zehntel Grad geteilt war und von — 5 bis + 105° ging, wurde an einem Holzgestell über dem Kundtschen Widerstand aufgehängt (T_1 in Fig. 5).

§ 6.

Die Versuchsanordnung.

An Hand des Schaltungsschemas (Fig. 5) soll jetzt die Anordnung zur Messung von φ genauer beschrieben werden. Der Saitenunterbrecher S. U. wird vor den vier Akkumulatoren S_1 getrieben.

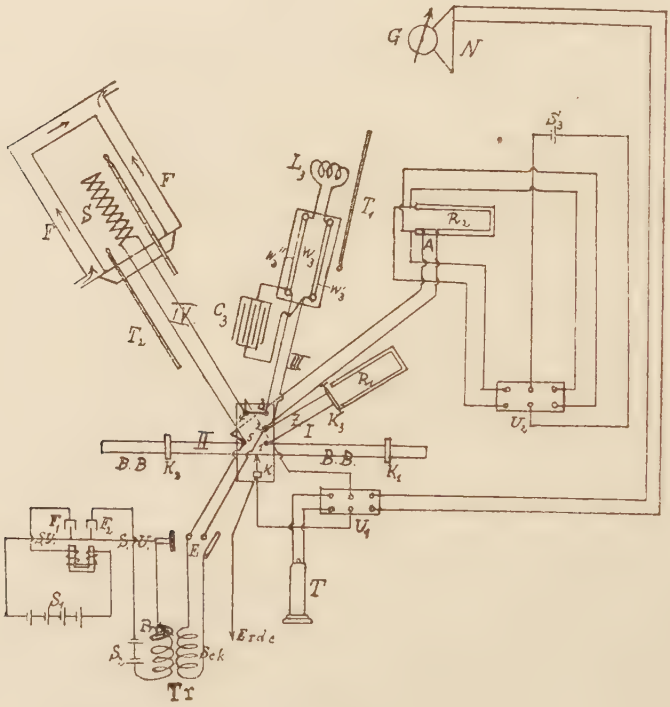

Fig. 5.

Seine zweite Unterbrechungsstelle F_2 befindet sich im Primärkreis (Prim) des Transformators Tr, der von den zwei Akkumulatoren S_2 gespeist wird. Von der Sekundärwindung (Sek) führten Drähte nach dem Wechselstromeinschalter E, und von diesen wird der Wechselstrom nach den Schrauben 2 und 5 der Bifilarbrücke (B. B. — B. B.) geleitet.

Die Knotenpunkte der Wheatstoneschen Brücke sind die Schrauben 2 und 5, die Schraube 4 und der Schleifkontakt K. Der Zweig I besteht zunächst aus zwei 1 mm dicken besponnenen Kupferdrähten, die bifilar (parallel) von 2 und 1 ausgehen im Abstande von etwa 8 mm, erst vertikal gegen die Brücke 5 cm, dann etwa 28 cm lang über ein horizontales Brett (das an einer Leiste eines auf dem Experimentiertisch stehenden Schemels angeschraubt ist), wo sie durch Wachs parallel zueinander festgehalten werden. Die etwas über den Rand des Bretts hinausstehenden Enden der Kupferdrähte sind durch eine Klemmschraube K_3 kurzgeschlossen, aber so lang, daß der Rheostat R_1 (Edelmann mit 200 Ω Gesamtwiderstand) daran gelegt werden kann. Ferner gehören zu Zweig I die bifilaren Manganindrähte, die von der Schraube 1 über den rechten Kontakt K_1 nach dem Schleifkontakt K gehen. Zweig II besteht allein aus den linken bifilaren Manganindrähten der Brücke von K aus nach K_2 und zurück nach Klemme 5. Die Enden des Zweiges III sind die Schrauben 2 und 3; von ihnen führen zunächst 10 cm lange bifilare Kupferdrähte nach den vorderen Klemmschrauben des Kundtschen Widerstandes W_3. Von 2 aus geht also der Strom erst nach dem rechten Platinwiderstand w_3', durch die Selbstinduktion L_3 (10^{-4} Henry-Normale oder Selbstind. Variator), dann durch die zweite platinierte Biegeröhre w_3'' zurück nach der Schraube 3. Auch die Zuleitungen vom Kundtschen Widerstand zur Selbstinduktion sind bifilar geführt und werden ebenso wie die von der Brücke nach W_3 durch eingeschnittene Pappscheiben, die im Abstand von etwa 2 cm auf die nicht sehr biegsamen Drähte gesetzt werden, in konstanter Entfernung gehalten. Parallel zum Kundtschen Widerstand an die der Brücke (B.B.) zunächst gelegenen Schrauben von W_3 ist der Drehkondensator C_3 geschaltet; seine etwa 15 cm langen Zuleitungen aus Drahtlitze waren immer dieselben und auf gleiche Art verdrillt.

Die Klemmen 3 und 4 auf der Hartgummiplatte sind durch ein Messingstückchen kurzgeschlossen. Zwischen den Schrauben 4 und 5 liegt der Zweig IV, die bifilare Spule S; von 4 und 5 führen 1,35 m lange bifilare Zuleitungen zu ihr hin, die gleichfalls durch eingekerbte Pappstücke in festem Abstand bleiben. S hängt in dem Gefäß F; T_2 und T_3 sind die schon erwähnten Thermometer zur Ablesung der Temperatur des Innenraums.

Vom Schleifkontakt K und der Schraube 4 führen Drähte, von 4 aus zunächst senkrecht nach unten, dann unter dem Brückengestell her nach den mittleren Klemmen der Wippe U_1. Die beiden linken Klemmen von U_1 sind mit dem Telephon T verbunden. Für die Versuche mit Wechselstrom ist noch wichtig,

daß der Schleifkontakt K durch Anlegen an die Wasserleitung geerdet war.

Bei der Gleichstrommessung ist die Stromquelle der Akkumulator S_3, dessen Strom zuerst nach den mittleren Klemmen des Kommutators U_2 führt; die vier noch übrigen Schrauben U_2 sind dann mit den Klemmen des Abzweigsrheostaten R_2, der nur zur Abnahme von Strom gebaut ist, so verbunden, daß das Umlegen der Wippe die Stromrichtung im Rheostaten umkehrt. Die Schaltung ist aus der Figur leicht zu ersehen. Von den Stechkontakten des Abzweigrheostaten bei A wird der Strom kleiner Intensität abgenommen; der eine der Drähte führt nach der Schraube 2, der andere nach 5, also an die Punkte der Wechselstromzuleitung. An Stelle des Kundtschen Widerstandes tritt bei Gleichstrom ein Rheostat. Der Galvanometerzweig der Gleichstrombrücke stimmt bis zu den mittleren Klemmen von U_1 mit der Telephonzuleitung überein, durch Umlegen dieser Wippe nach rechts wird das Desprez-d'Arsonval-Galvanometer G eingeschaltet, das durch entsprechendes Stöpseln des Nebenschlusses N mehr oder weniger empfindlich gemacht werden kann. Seine Ausschläge werden mit Fernrohr und Skala abgelesen, die sich über U_1 und dem rechten Teil der Brücke B. B. auf einem 50 cm hohen Schemel befinden, die aber in das Schaltungsschema nicht eingezeichnet sind.

Der Saitenunterbrecher stand nicht auf demselben Tisch wie die Brücke. Der Transformator war von dieser über 1,50 m entfernt. Die Anordnung der Apparate ist so getroffen, daß alle zu machenden Einstellungen und Ablesungen möglichst von demselben Standpunkt des Beobachters aus vorgenommen werden konnten. Längere Verbindungsdrähte wurden erst senkrecht in die Höhe von 2,30 m, dann durch Glashaken, die an ausgespannten Bindfaden befestigt waren, horizontal und schließlich wieder senkrecht nach unten geleitet. Dies gilt besonders für die Stromzuleitungen, deren Drähte noch miteinander verdrillt waren; außerhalb der eigentlichen Meßanordnung ist das zulässig und zur Vermeidung von Einwirkungen auf diese zweckmäßig.

§ 7.

Hilfsmessungen I.

Um ein Urteil über die Genauigkeit der Messung des Phasenfaktors φ abgeben zu können, war dieser bei verschiedenen Selbstinduktionen L_3 aus den Einstellungen des Drehkondensators zu bestimmen. Dazu war notwendig, daß die Werte der Kapazitäten und Selbstinduktionen zueinander passen; man mußte also entweder alle bei der Messung von φ verwandten Kapazitäten

und Selbstinduktionen auf eine bestimmte Kapazitätsnormale oder eine bestimmte Selbstinduktionsnormale beziehen. Es wurde die 10^{-4} Henry-Normale zur Grundeinheit gewählt, und es sollen in diesem Paragraphen die Versuche mitgeteilt werden, durch die mit jener alle benutzten Selbstinduktionen und Kapazitäten verglichen wurden.

Als Selbstinduktion ist außer der 10^{-4} Henry-Normalen der schon in § 7 beschriebene Variator gebraucht worden, und zwar meist eine bestimmte Einstellung (Teilstr. 55). Doch muß hier auf die Aichung eingegangen werden, da die Selbstinduktion der betreffenden Skalenteile aus der dabei gefundenen Kurve entnommen war.

Die Aichung geschah in einer Wheatstoneschen Brücke, in der sich die Bifilarbrücke mit 0,5 mm dicken Manganindrähten als

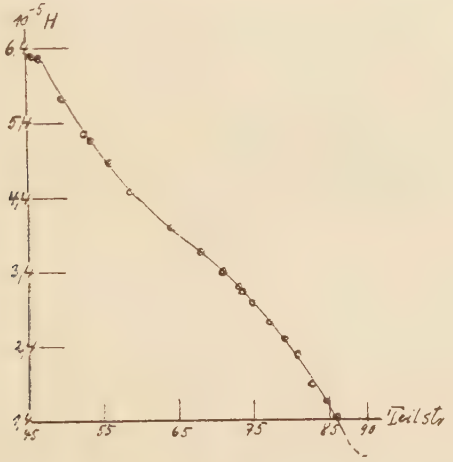

Fig. 6.

Zweig I und II befand. Zum Zweig III des Variators und IV der Normalen war je einer der Edelmann-Rheostaten zugeschaltet. Benutzt wurde ein von drei Akkumulatoren gelieferter unterbrochener Gleichstrom, um bei dem Vibrationsgalvanometer allein durch Drehen des Variators genügend starke Ausschläge zu bekommen. Diese wurden durch Ziehen kleinerer Widerstände (zwecks größerer Empfindlichkeit), Verschiebung des Schleifkontakts und Einstellung des Variators zur Ruhe gebracht. Für ein bestimmtes $\frac{W_3}{W_4}$ wurden die beiden letzteren 5 mal abgelesen.

Die w_1 und w_2 konnten durch Gleichstrom bestimmt werden, denn die Gleichgewichtsbedingungen lauten [1]) bei $\frac{\omega}{2\pi} = 480$:

$$(1) \qquad w_1 w_4 = w_2 w_3$$

$$(2) \qquad L_3 = L_4 \left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{L_1 w_4 - L_2 w_3}{L_4 w_2} \right).$$

In der letzten Gleichung kommt das rechtsstehende Korrektionsglied gerade noch in Betracht. Für die Selbstinduktionswerte des Variators wurden 19 Punkte bestimmt, durch die sich eine symmetrische Kurve legen ließ (Fig. 6).

Beispiel:

I. Gleichstrom: Variator und Normale eingeschaltet.
$w_3 = 0{,}585\ \Omega$ (Var. + Zul.)
$w_4 = 1{,}1 + 0{,}22$ (Norm.) $+ 0{,}055$ (Zul.) $= 1{,}375\ \Omega$.
Kontakte (wie in Fig. 5) K_1: 22,3, K_2: 55, K: — 1,1, — 1,0.

II. Wechselstrom: Mittel von 5 Einstellungen des Variators: 58,9. des Schleifkontakts: — 0,3.

III. Gleichstrom: Variator und Normale ausgeschaltet. Aus fünf verschiedenen w_4 bei konstanten w_3 ergab sich durch graphische Interpolation für — 0,3:

$$\frac{w_3}{w_4} = 0{,}4520 = \frac{w_1}{w_2}.$$

Das Korr.-Gl. $= \frac{0{,}39 \cdot 1{,}38 - 0{,}86 \cdot 0{,}59}{3{,}0} \cdot 10^{-2} = 0{,}0001$, d. h. 2 ‰ von $\frac{w_3}{w_4}$; $L_3 = 0{,}4521 \cdot 10^{-4}$ Henry für Teilstr. 58,9.

Die verdrillten Zuleitungen des Variators wurden bei den späteren Messungen gerade so wie bei der Aichung benutzt. Zur Normalen und ihrem Rheostaten führten auch bei der Aufnahme der Kurve verdrillte Zuleitungen. Bei der Berechnung war der Wert der Normalen mit den Zuleitungen gleich 10^{-4} Henry gesetzt (s. oben), also zu klein. Dieser konstante Fehler wurde dadurch beseitigt, daß bei verschieden langen bifilaren Zuleitungen zur Normalen und ihrem Rheostaten die Einstellungen bei sonst gleichen w_3 und w_4 wiederholt wurden. Das Verhältnis der neu gefundenen Werte zu den aus der Kurve entnommenen war 1,008 (im einzelnen 1,0088, 1,0081, 1,0076), so

[1]) da jeder Zweig den Operator $W + i\omega L$ hat.

daß mit 1,008 noch jeder Wert der Kurve zu multiplizieren ist. Die Genauigkeit der Einstellung des Variators beträgt $\frac{1}{10}$ Teilstr., d. h. $\frac{1}{450} = 2{,}2\,{}^0/_{00}$, da immer nur die eine Hälfte der Skala (45—90) gebraucht wurde.

Nicht berücksichtigt wurden die Selbstinduktionsreste der gezogenen Widerstände; da diese klein (0,1 bis 2 Ω) und bifilar gewickelt sind, kommen sie neben den verglichenen Selbstinduktionen der Normalen und des Variators nicht in Betracht. Daß bei der Aichung für unsere Zwecke eine genügende Genauigkeit erreicht ist, folgt daraus, daß bei den Messungen von φ ein systematischer Fehler bei Benutzung des Variators nicht auftrat.

Die nächste Aufgabe bestand darin, die später verwandten Kapazitäten auf die Grundeinheit 10^{-4} Henry zu beziehen. Diese (L_1) wurde im gegenüberliegenden Zweige der Wheatstoneschen Brücke mit den Kapazitäten verglichen, und zwar war sie an Stelle von R_1 in Fig. 5 an Z angelegt. Die Zweige III und IV bestanden aus zwei auf Lampenzylindern eingebrannten Kundtschen Widerständen w_3 und w_4. Neben w_4 war die Kapazitätsnormale C_4 geschaltet; ihr mußte aber, weil $\frac{w_3}{w_4}$ nahezu konstant war, der Drehkondensator C_4' als variabler Teil noch parallel gelegt werden. C_4' durfte nur einen kleinen Bruchteil von C_4 betragen, daher wurde als Kapazitätsnormale C_4 der Glimmerkondensator mit dem Sollwert 10^{-8} F benutzt, der mit $[10^{-8}]$ F bezeichnet werden soll. Gemessen wird durch Vergleich mit L_1 die Kapazität $K_4 = C_4 + C_4'$. Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$w_1 w_4 = w_2 w_3$$

$$K_4 = \frac{L_1}{w_2 w_3} + \frac{1}{w_4}\left(\frac{L_4}{w_4} - \frac{L_2}{w_2} - \frac{L_3}{w_3}\right).$$

Die Zuleitungen zu C_4 und C_4' waren verdrillt; beobachtet wurde mit dem Telephon.

Versuch: Einstellung von K_1 : 55,8, K_2 : 62,5 (vgl. Fig. 5).

Bei der Temp. 19,1° ist der Mittelwert von 10 Einstellungen beim Drehkondensator 10,3, beim Schleifkondensator + 0,2.

Durch Ersetzen ergaben sich bei gleicher Temp.: $w_3 = 463{,}1\ \Omega$, $w_4 = 503{,}8\ \Omega$. Hieraus und aus dem gemessenen Widerstand des ganzen Brückendrahtes $w_1 + w_2$ findet man $w_1 = 19{,}28\ \Omega$, $w_2 = 20{,}97\ \Omega$. Die Selbstinduktionen der Zweige sind:

$L_1 = 101{,}62 \cdot 10^{-6}$ H; $L_2 = 1{,}15 \cdot 10^{-6}$ H; $L_3 \cong L_4 \cong 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ H.

Es folgt:

$$K_4 = C_4 + C_4' = 1{,}046 \cdot 10^{-8}\ \text{F}.$$

Jetzt müssen die $[10^{-8}]$ F allein auf die 10^{-4} Henry bezogen werden. Zur Eliminierung der Kapazität C_4' des Drehkondensators ist diese durch C_4 auszudrücken. Dazu werden zuerst die Glimmerkondensatoren $[10^{-8}]$ und $[10^{-9}]$ F miteinander in einer Brücke verglichen, in der zwei Zweige aus diesen, die beiden andern aus Rheostaten bestehen. Die $[10^{-8}]$-Normale hatte dabei ihre vorigen Zuleitungen, und aus ihrem bekannten Wert ergab sich ein Mittel für $[10^{-9}]\,\text{F} = 0{,}0975 \cdot [10^{-8}]\,\text{F}$. In gleicher Weise wurde dann die Einstellung des Drehkondensators C_4' mit dessen verdrillten Zuleitungen auf die $[10^{-9}]$ F mit den schon benutzten Zuleitungen bezogen; aus dem Werte von $[10^{-9}]$ F folgte:

$$C_4' = 0{,}0289 \cdot [10^{-8}]\,\text{F}.$$

Die durch die 10^{-4} Henry gemessene Kapazität ist also:

$$K_4 = C_4 + C_4' = (1 + 0{,}029)\ [10^{-8}]$$
$$= 1{,}046 \cdot 10^{-8}\ \text{F}.$$

Da der von dem Drehkondensator herrührende Anteil an K_4 nur 3 % beträgt, kann man statt $0{,}029\ [10^{-8}]$ einfach $0{,}029 \cdot 10^{-8}$ setzen, so daß:

$$\underline{C_4 = [10^{-8}] = 1{,}017 \cdot 10^{-8}\ \text{F}.}$$

Für späterhin war es noch zweckmäßig, eine bestimmte Kapazität o h n e Zuleitungen zu kennen, welche von der Größenordnung des Drehkondensators ist. Dazu wurden die $[10^{-8}]$ F mit ihren verdrillten Zuleitungen, deren Wert ja zusammen bekannt ist, mit der $[10^{-9}]$-Normalen nochmals verglichen, zu dieser aber bifilare Kupferdrähte geführt, die eine Kapazität von $17 \cdot 10^{-13}$ F ($2 \cdot 10^{-12}$) hatten. Aus vier Veränderungen der Rheostatenwiderstände ergab sich ein Mittel:

$$\frac{C_3}{C_4} = 0{,}0957,$$

wo
$$C_3 = [10^{-9}] + \text{Zul.} = [10^{-9}] + 0{,}002 \cdot 10^{-9}\ \text{F}$$
$$C_4 = [10^{-8}] + \text{Zul.} = 1{,}017 \cdot 10^{-8}\ \text{F}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte bekommt man für:

$$\underline{[10^{-9}] = 0{,}0973 \cdot 10^{-8}\ \text{F}.}$$

§ 8.

Gang einer Messung des Phasenfaktors.

Wir kehren zur Messung des Phasenfaktors der bifilaren Spulen $\varphi = \frac{L}{w} - w\,C$ zurück und damit zu der in § 6 (S. 18) skizzierten Versuchsanordnung. Dieser Abschnitt soll eine Beschreibung der Methode enthalten, wie sie zur Bestimmung von φ stets angewandt wurde.

Jede der Spulen war aus 0,13 mm starkem besponnenen Kupferdraht auf einen zylindrischen Kern aus sich nicht verziehendem Teakholz vom Durchmesser 3,5 cm bifilar aufgewickelt. Sie hing immer in dem Gefäß F und bildete den Zweig IV der Brücke zwischen den Schrauben 4 und 5. Die Zusammensetzung der übrigen Zweige braucht nicht noch einmal angegeben zu werden, da sie auch aus dem Schaltungsschema (S. 18) leicht zu erkennen ist.

Um aus dem gemessenen $\varphi = \frac{L_4}{w_4} - w_4\,C_4$ die Größen L und C zu trennen, mußte für die gleiche Drahtlänge der Widerstand geändert werden. Dies geschah durch Beobachtung bei gewöhnlicher und niedrigerer Temperatur. Die letztere wurde dadurch hervorgebracht, daß einige Stunden durch den Mantel des Gefäßes F Leitungswasser strömte. Bei der Beobachtung bei höherer Temperatur hing die Spule, wie schon bemerkt, ebenfalls in dem Gefäß, um ihrem Widerstand bei dem großen Temperaturkoeffizienten des Kupfers einen möglichst konstanten Wert zu geben. Wenn diese Verhältnisse für einige Zeit genügend geschaffen waren, wurden die Messungen vorgenommen.

Zunächst wurden durch Gleichstrom die Kontakte K_1 und K_2 der bifilaren Brücke (B. B.) eingestellt, so daß der Schleifkontakt K nahe dem Nullpunkt der mittleren Skala sich befand. Darauf machte man mit Wechselstrom von der Wechselzahl von etwa 480 bei drei verschiedenen Selbstinduktionen L_3 Einstellungen auf Null durch Verschiebung des Schleifkontakts und Drehen des Kondensators C_3. Einmal wurde überhaupt keine Selbstinduktion in Zweig III geschaltet, dann die 10^{-4} Henry-Normale, schließlich der Selbstinduktionsvariator, der meist auf den Skalenteil 55 gestellt war. Wenn die Einstellung mit dem Drehkondensator allein sich als unmöglich erwies, wurde als dritte Selbstinduktion die Normale und der Variator hintereinander geschaltet. In jedem Einzelfalle wurden Schleifkontakt und Drehkondensator 5 mal abgelesen, ebenso die Temperatur des Zimmers und die des Innenraums von F. Es zeigt sich, daß

diese während einer der drei Meßreihen fast stets konstant blieb, und daher war, schon um durch das Herausziehen des einen tiefer im Gefäß steckenden Thermometers Temperaturfehler zu vermeiden, nur eine Thermometerbeobachtung am Anfang und Ende der fünf Messungen notwendig.

Dann wurden die Widerstände der Brücke mit Gleichstrom gemessen, was wegen der Gleichung (7) S. 11 zulässig ist. Die Widerstände der Zweige III und IV sind durch Ersetzen gemessen worden. Dabei wurde so vorgegangen, daß man zuerst den Kundtschen Widerstand w_3, Selbstinduktion L_3 und Kapazität C_3 durch einen Rheostaten (Edelmann mit größerem Gesamtwiderstand) substituierte und durch Einstellung auf Skalenteile, die um den Nullpunkt des Schleifkontakts für Wechselstrom gelegen waren, in der üblichen Art interpolierte. Hierauf wurde die Spule, deren Temperatur sich gegen die Ablesungen bei Wechselstrom nicht wesentlich geändert haben durfte, durch einen Rheostaten (S. H.) ersetzt und auch ihr Widerstand durch Interpolieren bestimmt; dabei war der Rheostat in Zweig III der Ballastwiderstand, wie es vorher beim Ersetzen des Kundtschen Widerstands die Spule gewesen war.

Zur Berechnung von φ mußte man noch die Widerstände der Zweige I und II der Bifilarbrücke einzeln kennen. Man kannte aus der vorigen Messung schon ihr Verhältnis $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} = a$ als das der Rheostatenwiderstände, bezw. konnte man es daraus interpolieren. Jetzt wurde der Rheostat R_1 (S. 18) an die Kupferdrähte Z gelegt, in ihm ein Widerstand b ($= 10\,\Omega$) gezogen, der sich zu w_1 addierte, und das Brückengleichgewicht durch Verändern der Rheostaten in den Zweigen III und IV wiederhergestellt, deren Widerstände sich dann wie c verhielten. Man hatte also die beiden Gleichungen:

$$\frac{w_1}{w_2} = a, \quad \frac{w_1 + b}{w_2} = c$$

und konnte aus beiden w_1 und w_2 finden. Die Selbstinduktionen der bifilaren Brückendrähte lassen sich berechnen, ebenso der bifilaren Zuleitungen im Zweig III, die hier Korrektionsglieder sind. Die für die Größe von φ mehr in Betracht kommenden Selbstinduktionen der bifilaren Kupferdrähte Z, die zum Rheostaten R_1 führten, wurden experimentell bestimmt (§ 11). Die Kapazitäten des Drehkondensators, die den Mittelwerten von je fünf zusammengehörigen Einstellungen entsprachen, waren durch Vergleich mit der $[10^{-9}]$ Kapazität zu bestimmen. Es wurden besondere Leitungen nach der leicht aufzubauenden Versuchs-

anordnung gelegt, die aus zwei Rheostaten, der $\lfloor 10^{-9} \rfloor$ Kapazität und dem Drehkondensator bestand, der mit seinen Zuleitungen aus der Hauptanordnung herausgenommen wurde. Als Nullinstrument diente das Telephon, mit dem für jeden Mittelwert der Drehkondensatorablesungen durch Verändern der Rheostatenwiderstände drei Messungen gemacht wurden.

Es ist noch zu bemerken, daß die Werte des Kundtschen Widerstands für die Einstellungen bei Wechselstrom nachher aus den Widerständen der andern Zweige berechnet wurden; dies ist vorteilhaft, da jene Widerstände auch etwas von der Belastung abhängen, die bei Wechselstrom viel größer ist als bei Gleichstrom (Desprez-d'Arsonval!).

§ 9.

Beobachtungen und Ausrechnung in einem Einzelfall.

Die allgemeinen Ausführungen des vorigen Paragraphen werden jetzt an einem Beispiel zahlenmäßig durchgeführt; später sollen bei Angabe der Resultate (im dritten Kapitel) nur die wichtigeren Einzelheiten mitgeteilt werden.

Es wird eine Spule bei tieferer Temperatur untersucht, die 30 cm lang und derart bifilar gewickelt ist, daß die einzelnen Windungen dicht aufeinandersitzen.

I. Gleichstrom: Einstellung der Kontakte K_1 und K_2 (S. 18):
K_1 (rechts): 64,2 cm der Papierskala
K_2 (links): 73,2 cm (steht ganz außen)
Temp. des Kundt: 16,65°
„ der Spule unten: 8,65°, oben 8,9°.

II. Wechselstrom:

1. Zweig III enthält: Kundt mit parallelem Drehkondensator.

Temperatur			Einstellungen	
Kundt	Spule unten	Spule oben	Drehkondensator	Schleifkontakt (mm)
16,65	8,65	8,9	108,5	+ 1,2
16,6			108,0	+ 1,2
16,6			108,4	+ 1,2
16,6			107,9	+ 1,2
16,6	8,65	8,9	108,0	+ 1,1

Mittelwert der Drehkondensator-Einstellungen 108,2

„ „ Schleifkontakt-Einstellungen + 1,2

2. Zweig III enthält: Kundt + 10^{-4} Henry-Normale mit parallelem Drehkondensator.

Temperatur			Einstellungen	
Kundt	Spule unten	Spule oben	Drehkondensator	Schleifkontakt (mm)
16,7	8,65	8,9	164,8	+ 0,3
16,7			165,5	+ 0,3
16,7			164,8	+ 0,3
16,7			165,5	+ 0,3
16,7	8,68	8,9	165,1	+ 0,3

Mittelwert der Drehkondensator-Einstellungen 165,1

„ „ Schleifkontakt-Einstellungen + 0,3

3. Zweig III enthält: Kundt + Selbstind. Variator Teilstrich 55 mit parallelem Drehkondensator.

Temperatur			Einstellungen	
Kundt	Spule unten	Spule oben	Drehkondensator	Schleifkontakt (mm)
16,75	8,7	8,95	135,9	— 1,2
16,75			135,6	— 1,2
16,75			135,0	— 1,2
16,75			135,7	— 1,2
16,75	8,7	8,95	135,7	— 1,2

Mittelwert der Drehkondensator-Einstellungen 165,3

„ „ Schleifkontakt-Einstellungen — 1,2

III. Gleichstrom:

1. Kundt + L_3 + Drehkondensator wird durch den Edelmann-Rheostaten mit größerem Gesamtwiderstand ersetzt:

$$w_3 = 200 + 40 + 30 + 10 + 2\ \Omega.$$

Der Schleifkontakt K wird auf die links in der folgenden Tabelle hingeschriebenen Skalenteile eingestellt; es ergeben sich die in der mittleren Kolonne stehenden Ausschläge durch Kommutieren, $^1/_{10}$ Skalenteil ist bei der Ablesung im Fernrohr geschätzt. Die Mittelwerte der Differenzen aufeinanderfolgender Umkehrpunkte sind in der dritten Kolonne eingetragen.

Teilstrich	Ausschläge		Differenz
— 2,0	63,8	66,8	— 3,0
	64,0	66,9	
0,0	74,7	57,9	+ 16,8
	74,8	58,1	

Die Vorzeichen der Differenzen bedeuten nur einen Richtungswechsel des Ausschlags; daher ist an sich ihre Bezeichnungsweise gleichgültig, doch ist die hier gewählte für alle Versuche konsequent durchgeführt. Die Nullstellung ergibt sich für den Skalenteil:

$$-2{,}0 + \frac{3{,}0}{19{,}8} \cdot 2 = \underline{-1{,}70}.$$

Temperatur der Spule: 8,95; 8,68.

2. Die Spule S wird durch den S. H.-Rheostaten ersetzt; der Edelmann-Rheostat behält seinen Wert (s. oben w_3). In jenem wird gezogen:

$w_4 = 301{,}2\ \Omega$ (S. H.).

Teilstrich	Ausschläge		Differenz
— 3,0	58,9 59,1	71,5 71,8	— 12,7
— 1,0	69,3 69,7	61,7 61,9	+ 7,7

$$\text{Nullstellung} \quad -1{,}0 - \frac{7{,}7}{20{,}4} \cdot 2 = -1{,}75$$

Für $w_4 = 303{,}2\ \Omega$ (S. H.) ergab sich durch Ablesung der Ausschläge für die Teilstriche + 2,0 und 4,0 mm die Nullstellung + 2,40.

3. Der Rheostat R_1 (S. 18) wird durch die bifilaren Kupferdrähte Z an die Brücke angeschlossen und in ihm 10 Ω gezogen, die sich zu w_1 addieren. Das Brückengleichgewicht wird allein durch Verändern des S. H.-Rheostaten wiederhergestellt, w_3 bleibt wie bei 2 und 3:

$w_3 = (200 + 40 + 30 + 10 + 2)\ \Omega$ Edelm.
$w_4 = 206{,}0\ \Omega$ S. H.

Als Nullpunkte ergab sich hierbei: — 3,46.

Bei konstantem w_3 und $w_4 = 207{,}7\ \Omega$ S. H. war der Nullpunkt + 2,49.

IV. Wechselstrom: Vergleich der Mittelwerte der Einstellungen des Drehkondensators mit der $[10^{-9}]$ Kapazität. Die Zuleitungen zu dieser sind die gleichen bifilaren wie bei der Bestimmung von $[10^{-9}]$ (§ 7), die des Drehkondensators sind verdrillt wie bei den Einstellungen unter II. Wenn der Edelmann-Rheostat

w_3 an der Kapazität $C_3 = [10^{-9}]$ anliegt, ist der Drehkondensator $= C_4$; folgende Beobachtungen wurden gemacht[1]):

Drehkondensator	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2
Teilstrich 135,6	400 Ω	123 Ω (S. H.)	400 + 100	154	400 + 300	216
„ 165,1	400 Ω	102 Ω (S. H.)	400 + 100	128	400 + 300	179
„ 108,2	400 Ω	155 Ω (S. H.)	400 + 100	193	400 + 300	271

Ausrechnung des Phasenfaktors.

I. Widerstand der Bifilarspule:

Nullstellung der Spule (vgl. oben III, 1): — 1,70 mm
„ für 301,2 Ω S. H. (vgl. oben III, 2): — 1,75 mm
„ „ 303,2 Ω S. H. (vgl. oben III, 2): + 2,40 „

Hieraus der Widerstand der Spule: $301{,}2 + \frac{0{,}05}{4{,}20} \cdot 2{,}0 = 301{,}22\,\Omega$.

Die Zuleitungen zur Spule betragen 0,14 Ω, also:

$$w_4 = 301{,}36\ \Omega.$$

II. Ausrechnung der Widerstände w_1, w_2, w_3 für die drei Versuche II (s. oben):

Der Widerstand w_3 ist bei allen Gleichstrommessungen (III, 1, 2, 3) konstant geblieben; sein korrigierter Wert mit Zuleitungen ist $w_3 = 281{,}05\,\Omega$. Die den gezogenen Widerständen w_4 zugehörigen Einstellungen des Schleifkontakts stehen in der ersten Kolonne der folgenden Tabellen, die entsprechenden Werte von w_3/w_4 in der letzten. Die nächste Tabelle bezieht sich auf den Fall der kurzgeschlossenen Zuleitungen Z zu R_1 (III. 2), die zweite auf die Zuschaltung von 10 Ω zu w_1 (III, 3):

Schleifkontakt	w_3	w_4	w_3/w_4
— 1,75	$281{,}0_5$	$301{,}3_4$	$0{,}9326_7$
+ 2,40	$281{,}0_5$	$303{,}3_4$	$0{,}9265_2$

Für $w_1 + 10\ \Omega$ (in gleicher Reihenfolge):

— 3,46	$281{,}0_5$	$206{,}1_4$	$1{,}363_4$
+ 2,49	$281{,}0_5$	$207{,}8_4$	$1{,}352_3$

[1]) Zur leichteren logarithm. Rechnung (s. unten) wurden nach Möglichkeit die gleichen Edelmann-Widerstände benutzt.

Trägt man die Stellungen des Schleifkontakts als Abszissen, die zugehörigen Werte von w_3/w_4 als Ordinaten auf und verbindet die beiden Punkte durch eine Gerade, so kann man für die Einstellungen des Schleifkontaktes bei Wechselstrom (+ 1,2; + 0,3; — 1,2) die Werte für w_3, w_4 ablesen.[1]) Dabei ist zu bemerken, daß früher mehr als zwei Punkte für w_3/w_4 durch kleinere Veränderungen der Rheostatenwiderstände bestimmt wurden, daß diese Punkte sich aber immer gut durch eine Gerade verbinden ließen. Daher wurden späterhin nur zwei Ablesungen gemacht, die in den beiden Fällen des unveränderten und (um 10 Ω) veränderten w_1 die Einstellungen des Schleifkontakts bei Wechselstrom (III) umschließen mußten.

Für + 1,2 liest man ab:

$$\begin{aligned} w_1 + 10 &= 1{,}3547\ w_2 \\ w_1 &= 0{,}9285\ \ " \\ \hline 10 &= 0{,}4262\ w_2 \end{aligned}$$

$w_2 = 23{,}45\ \Omega$; $w_1 = 21{,}77\ \Omega$

$w_4 = 301{,}4\ \Omega$ (nach I); hieraus und aus $\frac{w_1}{w_2}$:

$w_3 = 279{,}8\ \Omega$

Auf demselben Wege ergeben sich für die andern Einstellungen:

Schleifkontakt	w_1	w_2	w_3	w_4
+ 0,3	21,78	23,43	280,2	301,4
— 1,2	21,81	23,40	289,9	301,4

III. Ausrechnung der Kapazitäten des Drehkondensators: Hierbei ist $C_3 = [10^{-9}] + \text{Zul.} = 0{,}976 \cdot 10^{-9}$ F, ferner sind die Edelmannschen Widerstände korrigiert und $C_4 = C\ (C', C'')$ gesetzt.

Drehkondensator 135,6:

$$C = 0{,}976 \cdot \frac{398{,}6}{123} = 2{,}162_9$$

$$= 0{,}976 \cdot \frac{498{,}1}{154} = 3{,}156_8$$

$$= 0{,}976 \cdot \frac{697{,}7}{216} = 3{,}152_6$$

1. Drehkondensator 135,6: $C = 3{,}157 \cdot 10^{-9}$ F

Ebenso findet man

2. Drehkondensator 108,2: $C' = 2{,}514 \cdot 10^{-9}$ F
3. Drehkondensator 165,1: $C'' = 3{,}806 \cdot 10^{-9}$ F

[1]) Man kann sie natürlich auch durch Rechnung finden.

IV. Die Selbstinduktionen der bifilaren Brückendrähte L_1, L_2 ergeben sich aus ihrer Länge, dem Drahtradius und dem Abstand der Drahtachsen in bekannter Weise mit Hilfe der Orlichschen Kurventafel[1]):

$$L_1 = 1{,}200 \cdot 10^{-6} \text{ Henry}, \quad L_2 = 1{,}314 \cdot 10^{-6} \text{ Henry}.$$

Hierbei ist allerdings noch eine Korrektion angebracht, über die im nächsten Paragraphen weiteres gesagt wird. Jene Werte können wegen der kleinen Verschiebungen des Schleifkontakts für alle drei Messungen mit Wechselstrom gebraucht werden. Die Selbstinduktion L_1' der bifilaren Zuleitungen Z zum Rheostaten R_1 wurden durch besondere Versuche experimentell bestimmt (§ 11) und hatte den Wert: $L_1' = 0{,}727 \cdot 10^{-6}$ Henry. Im Zweig III sind die Selbstinduktion und Kapazität des „bifilaren" Kundtschen Widerstandes und die der bifilaren Zuleitungen berücksichtigt, die zu L_3 und C_3 addiert werden (§ 10).

V. Ausrechnung der Werte von φ:

1. Zweig III: Kundt mit parallelem Drehkondensator.
Schleifkontakt: + 1,2, Drehkondensator: 108,2

$w_1 = 21{,}77\ \Omega$ $\quad L_1 = 1{,}200 \cdot 10^{-6}$ Henry
$w_2 = 23{,}45\ \Omega$ $\quad L_1' = 0{,}727 \cdot 10^{-6}$ „
$w_3 = 279{,}8\ \Omega$ $\quad L_2 = 1{,}314 \cdot 10^{-6}$ „
$w_4 = 301{,}4\ \Omega$ $\quad L_3 = 0{,}539 \cdot 10^{-6}$ „ (Kundt + Zul.)
$C_3 = 2{,}517 \cdot 10^{-6}$ F (mit Kundt + Zul.)

φ ergibt sich aus Gl. (8) S. 11, wo L_1 durch $L_1 + L_1'$ zu ersetzen ist:

$$\varphi = \frac{L_2}{w_2} + \frac{L_3}{w_3} - w_3 C_3 - \frac{L_1 + L_1'}{w_1}$$
$$= (+ 56{,}0 + 1{,}9 - 704{,}0 - 55{,}1 - 33{,}4) \cdot 10^{-9}$$
$$\underline{\varphi = - 734{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ sec}}$$

2. Zweig III: Kundt + 10^{-4} Henry mit parallelem Drehkondensator.
Schleifkontakt + 0,3, Drehkondensator 165,1.

Die einzelnen Werte der w und L sind aus der folgenden Gleichung zu ersehen:

$$\varphi = \frac{1{,}314 \cdot 10^{-6}}{23{,}43} + \frac{1{,}006 \cdot 10^{-4}}{280{,}1} - 280{,}2 \cdot 3{,}810 \cdot 10^{-9} - \frac{1{,}927 \cdot 10^{-6}}{21{,}78}$$
$$\underline{\varphi = - 740{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ sec}}$$

[1]) Am Ende von Orlich, Kap. und Ind.

3. Zweig III: Kundt + Selbstind. Var. Teilstr. 55 mit parallelem Drehkondensator.

Schleifkontakt — 1,2, Drehkondensator 135,6.

$$\varphi = \frac{1{,}314 \cdot 10^{-6}}{23{,}40} + \frac{0{,}506 \cdot 10^{-4}}{280{,}8} - 280{,}9 \cdot 3{,}160 \cdot 10^{-9} - \frac{1{,}927 \cdot 10^{-6}}{21{,}81}$$

$$\varphi = -739{,}4 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$$

Als Mittelwert der drei erhaltenen Resultate folgt:

$$\varphi = \frac{L_4}{w_4} - w_4 C_4 = -738 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$$

Es hat keinen Zweck mehr, Stellen anzugeben (vgl. die nächsten Paragraphen). Vom Mittelwert aus gerechnet beträgt die größte Abweichung der Resultate von φ 4,6 ‰.

§ 10.

Bemerkung zur angewandten Methode.

Man kann mit Recht fragen: ist bei dieser Art von Messungen die Bifilarbrücke überhaupt notwendig? Giebe hat sie ja für den Vergleich von Selbstinduktionsnormalen erst bei höheren Wechselzahlen (> 2000) gebraucht. Bei der Aichung des Variators (§ 7) ergab sich denn auch, daß der Einfluß der Selbstinduktion der bifilaren Brückenzweige für die Frequenz 480 gering ist, aber immerhin bei diesen kleineren Selbstinduktionen sich bemerkbar macht. Gegen die Verwendung der Bifilarbrücke für unsere Zwecke könnte man sagen, daß in der Bestimmungsgleichung für φ (S. 11, Gl. (8) die Selbstinduktionen der Brückendrähte in der Form $\frac{L_2}{w_2} - \frac{L_1}{w_1}$ auftreten. Da beim gewöhnlichen und bifilaren Schleifdraht L und w proportional der Länge sind, würden sich beide Glieder ziemlich genau aufheben. Wenn dies bei unsern Messungen nicht der Fall ist, liegt es an der Selbstinduktion L_1' der Zuleitungen Z. für die Kupfer gewählt war, um die Möglichkeit einer unsymmetrischen Brücke ohne Vertauschung der Zweige III und IV offen zu lassen. Trennt man absichtlich bei der Berechnung von φ $\frac{L_1'}{w_1}$ von $\frac{L_1}{w_1}$ (wie oben S. 32, V, 1), so sind tatsächlich bis auf das Vorzeichen $\frac{L_1}{w_1}$ und $\frac{L_2}{w_2}$ ungefähr gleich. Außerdem ist bei den verschiedensten Ein-

stellungen von K_2 die Zeitkonstante $\frac{L_2}{W_2}$ wesentlich konstant geblieben (55 bis $56 \cdot 10^{-9}$ sec).

Die Bifilarbrücke würde sich also, falls sie so gebaut ist, daß die Zeitkonstanten ihrer Drähte gleich wären, von einem gewöhnlichen Schleifdraht scheinbar nicht unterscheiden. Trotzdem ist sie für die Messungen von φ zweckmäßig und sogar notwendig. Bei einem gewöhnlichen Brückendraht müssen die Zuleitungen nach dessen entgegengesetzten, weit voneinander entfernten Enden gelegt werden. Dann aber werden die unbekannten gegenseitigen Induktionen zwischen Draht und Zuleitungen auf das Resultat von φ von großem Einfluß sein. Bei der bifilaren Brücke jedoch ist es möglich, hierin bestimmte Verhältnisse zu schaffen, da jetzt zu den Vergleichskörpern von demselben kleinen Gebiet aus sich bifilare Zuleitungen legen lassen, deren Selbstinduktion und Kapazität berücksichtigt werden können. Weiter sind ihre Brückendrähte selbst *geschlossene* Schleifen, für die eine Selbstinduktion sich wirklich definieren läßt.[1]) Außerdem kann man den Einfluß ihrer gegenseitigen Kapazität auf folgende Weise in Rechnung ziehen.

Eine am einen Ende kurzgeschlossene Doppelleitung habe die Länge a; für ihre Längeneinheit sei w der Widerstand, l die Selbstinduktion und k die Kapazität. Nach E. Orlich[2]) kann man dann ihre Wirkungsweise auffassen als eine Selbstinduktion l a vom Widerstand w a, der eine Kapazität $^1/_3$ k a parallel geschaltet ist. Um nachzuprüfen, ob im vorigen Paragraphen die gegenseitige Kapazität der Brückendrähte eine Rolle spielt, stellt man den genaueren Widerstandsoperator ϱ für diese auf. Setzt man $W = w a$, $L = l a$, $C = {}^1/_3 k a$, so findet man (wie auf S. 11 Gl. (8)) durch Entwicklung:

$$\varrho = W(1 + 2\omega^2 L C) + i\omega L \left(1 - \frac{W^2 C}{L} + \omega^2 L C\right).$$

Für den Zweig 1 war $W_1 = 21{,}8\ \Omega$, $L_1 = 1{,}20 \cdot 10^{-6}$ Henry; da a = 0,66 m ist, ergibt sich aus Orlichs Kurventafel

$$C_1 = \frac{k_1 a}{3} = \frac{65 \cdot 10^{-13} \cdot 0{,}66}{3},$$

folglich $\frac{W_1^2 C_1}{L_1} = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ und $\omega^2 L_1 C_1 = 25 \cdot 10^{-13}$.

[1]) Auch Giebe macht in der Zeitschr. f. Instr.-K. 1911 Heft 2 darauf aufmerksam.

[2]) Kap. und Ind. S. 132.

Dieses letzte Glied hat, wie zu erwarten, gar keinen Einfluß (neben 1!), es tritt daher keine Widerstandserhöhung durch die Kapazität ein. Der Einfluß des andern Gliedes beträgt $^1/_2\,^0/_{00}$, kommt also bei der üblichen Berechnung von L_1 nicht in Betracht. Die Kapazitätswirkung wächst aber mit dem Quadrat des Widerstands. Selbst bei dessen größtem Wert, d. h. wenn die Kontakte K_1 und K_2 ganz außen stehen (z. B. w_2 in § 9), ist $\frac{W^2C}{L} = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ und kann daher stets vernachlässigt werden.

Man muß hiernach zur Vermeidung der Kapazität Drähte von nicht zu großem Widerstand benutzen; solche von zu kleinem sind auch nicht geeignet, da sonst die Wirkung der Zeitkonstanten (bei denen w im Nenner steht) auf das Resultat zu groß wird.

Bei der Berechnung der Selbstinduktionen der Bifilarbrücke mußte an der für bifilare Drähte gültigen Formel für die Selbstinduktion der Längeneinheit $l = 4 \log \text{nat} \frac{d}{r} + 1$,[1]) in der r der Drahtradius, d der Abstand der Drahtachsen ist, ein Korrektionsglied angebracht werden. Dies lag daran, daß die Bifilarbrücke ursprünglich für 0,6 mm dicken Draht im Abstand 8 mm gebaut war. Aus diesem Grunde hatten die benutzten 0,1 mm dicken Drähte bei den Schrauben auf H. H. (Fig. 3) eine Entfernung von 6 mm, in der Mitte eine solche von 8,5 mm, weil sie hier durch Hartgummihaken auf der Skala festgehalten wurden. Man kann aber die von dieser Divergenz herrührende Änderung der Selbstinduktion leicht berücksichtigen. Die Selbstinduktion wenig divergierender Drähte, deren Symmetrieachse zur x-Richtung genommen wird und welche die Länge a hat, ist gegeben durch:

$$L = 4 \int_0^a \left(\log \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right) dx \qquad (\log = \log \text{nat}).$$

Der kleinste Abstand der Drahtachsen sei d_0, der größte $d_a = d_0 + \Delta$, jeder andere dazwischenliegende daher $d_x = d_0 + \frac{x}{a}\Delta$, also wird:

$$L = 4 \int_0^a \left\{ \log \left(\frac{d_0}{r} + \frac{\Delta}{r} \cdot \frac{x}{a} \right) + \frac{1}{4} \right\} dx .$$

Das Integral läßt sich durch Entwicklung des Logarithmus leicht vereinfachen unter der Annahme, daß $\frac{\Delta}{d_0}$ klein ist, so daß folgt:

[1]) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 10. Aufl. S. 605.

$$L = 4\,a\left\{\left(\log\frac{d_o}{r}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{d_o}-\frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{d_o}\right)^2\right\},$$

$$L = L_{\infty}+2\,a\left\{\frac{\Delta}{d_o}-\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{d_o}\right)^2\right\},$$

wo L_o den Wert für genau bifilare Drähte vom Abstand d_o und der Länge a bedeutet und aus der Kurventafel zu entnehmen ist. Nach dieser genaueren Formel sind die Selbstinduktionen der Brückendrähte gerechnet. Steht K_1 ganz außen, so ist die Änderung von L_o infolge der Divergenz $4\,^0{}_0$ ($1{,}308\cdot10^{-6}$ statt 1,255).

Erst als die Messungen des Phasenfaktors fast ganz zu Ende geführt waren, erhielt ich Kenntnis von der letzten Arbeit von Giebe (§ 2), in der er über sehr starke Einflüsse der Erdkapazität berichtet. Durch Erdung des Schleifkontakts K hatte ich mich gegen diesen Fehler zu schützen gesucht, habe dann aber seinen Einfluß einer genauen Untersuchung unterzogen. Schon einmal war aus Versehen der Schleifkontakt nicht geerdet worden; man fand durch Drehen des Kondensators nur ein Minimum im Telephon, aber keine völlige Auslöschung des Tones wie sonst. Dies ergab sich auch in jenem Fall beim Vergleich der Kapazitäten untereinander. Vertauscht man jedoch bei geerdetem Schleifkontakt Galvanometer- und Elementzweig, so bekommt man innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen Einstellungen des Drehkondensators, z. B. bei möglichst rascher Umwechselung für Schleifkontakt und Drehkondensator folgende Werte: Teilstrich 17,2; — 1,8 mm; kommutiert 17,7; — 2,2 mm. Damit ist gezeigt, daß die Brücke als ganzes oder einzelne ihrer Teile keine merkliche Kapazität gegen Erde besitzen. Auf diese aber hat Giebe den Unterschied zurückgeführt, der sich für jene Vertauschung bei seinen Versuchen ergab. Unser davon abweichendes Resultat wird auf die bei der Bifilarbrücke verwandten Widerstände mittlerer Größe zurückzuführen sein, die nach Giebe zur Vermeidung jenes Fehlers zu empfehlen sind, und vor allem auf die benutzte kleinere Wechselzahl, die 4 bis 9mal geringer ist als bei den betreffenden Untersuchungen von Giebe.

Eine weitere mit dem Vorigen zusammenhängende Frage ist die: wirkt die Kapazität des Kühlgefäßes gegen die Spule, die sich der Eigenkapazität überlagert, fälschend auf die Messung des Phasenfaktors ein? Nach einer Überschlagsrechnung, in der man Spule und Gefäßwand als Zylinderkondensator ansieht, müßte das nicht der Fall sein, da die so erhaltene „Betriebskapazität“

gegen die der Spule (§ 15) zu klein ist. Dies liegt an der verhältnismäßig großen Entfernung von Gefäß und Spule verglichen mit der zweier Drähte und wurde noch experimentell nachgewiesen durch metallische Verbindung der Knickstelle der Spule mit dem Kühlgefäß. Die Einstellungen des Drehkondensators waren ganz die gleichen wie gewöhnlich.

Es kann auch als ausgeschlossen gelten, daß etwa durch Wirbelströme in der Gefäßwand die Selbstinduktion der Spule verändert wird. Für den noch vorhandenen Rest der magnetischen Kraftlinien ist die Streuung so gering, daß das ziemlich weit entfernte Gefäß nicht mehr getroffen wird. Weiter kann man bei der benutzten Frequenz von dielektrischen Verlusten in der Isolation absehen (zumal zwischen der seidenen Bewicklung zweier benachbarter Drähte noch eine dünne Luftschicht vorhanden ist), ebenso bei dem sehr gut isolierenden Paraffinöl des Drehkondensators.[1])

Über die Empfindlichkeit der Nullinstrumente bei Wechselstrom mag nur gesagt werden, daß die „Minimumsbreite", d. h. das deutliche Auftreten eines Tons oder Ausschlags (Giebe), beim Telephon außerordentlich viel schmaler war als beim Vibrationsgalvanometer. In der Meßanordnung für φ z. B. war die Einstellungsgenauigkeit des Telephons 2 Teilstriche, die des Vibrationsgalvanometers bei 10 Einstellungen 16 Teilstriche des Drehkondensators (z. B. 75 und 91).

Bei dem benutzten „bifilaren" Kundtschen Widerstand konnte man Selbstinduktion und Kapazität abschätzen. Jene betrug $L = 0{,}13 \cdot 10^{-6}$ H; diese ist, wenn man den großen Widerstand direkt oder durch den Variator oder die Normale, die sehr kleinen Widerstand haben, kurzschließt, $C = 4{,}3 \cdot 10^{-13}$ F. Ihr Wert ist so gering, daß er nur bei den kleinsten Einstellungen des Drehkondensators die an sich unsichere letzte Stelle erhöht. Für den Fall, daß beide platinierten Röhren zusammen bei einer der Messungen zu großen Widerstand haben, kann man die eine durch ein gleich dickes Messingrohr ersetzen, ohne die bequeme Schaltung aufgeben zu müssen.

Der Messung von φ werden vor allem durch die Ungenauigkeit der Einstellung des Drehkondensators ihre Grenzen gesetzt, die selbst wieder mit der Empfindlichkeit des Telephons zusammenhängen. Treten, wie dies vorkam, Unterschiede von beinah zwei Skalenteilen auf, so sind die Werte der Kapazitäten schon um 2 % verschieden (für Teilstrich 105,2: $2{,}447 \cdot 10^{-9}$ F, für Teilstrich 107,3: $2{,}494 \cdot 10^{-9}$ F).

[1]) Herr Dr. R. Schmidt teilte mir bei der Korrektur mit, daß in Seide dielektrische Verluste stets vorhanden sind; Herr Dr. Giebe glaubt aber, daß diese auf meine Messungen und Resultate keinen Einfluß haben.

§ 11.
Hilfsmessungen II.

Zur Bestimmung des Phasenfaktors war noch die Selbstinduktion L_1' der bifilaren Zuleitungen Z zum Rheostaten R_1 (S. 18) zu messen. Die Berechnung genügt hier nicht, denn durch die Biegung der Drähte werden andere Verhältnisse hervorgebracht als bei einfachen parallelen Drähten. Es konzentrieren sich in der Nähe des kürzeren vertikal geführten Teils, an der Umbiegungsstelle und am Ausgangspunkt bei der Platte P magnetische Kraftlinien. Dagegen kann angenommen werden, daß für die bifilaren Manganindrähte die Berechnung ausreicht, weil keine Knickstellen auftreten und ihr Abstand klein gegen ihre Länge ist; außerdem heben sich, wie schon (S. 33) gesagt, die auf die Bifilardrähte bezüglichen Glieder $\frac{L_2}{w_2} - \frac{L_1}{w_1}$ nahezu auf.

Die Messung von L_1' geschah in der beschriebenen Meßanordnung für φ. Man konnte L_1' durch Gleichsetzung des Phasenfaktors einer beliebigen bifilaren Spule aus den Nullstellungen des Drehkondensators finden, die bei verschiedenen Einstellungen der Brückenkontakte K_1 und K_2 abgelesen wurden. Die Konstanz des Phasenfaktors während der Versuche wurde durch eine Manganinspule gewährleistet, die einmal schon einen kleinen Temperaturkoeffizienten hatte, aber außerdem noch im Gefäß F auf konstanter Temperatur gehalten wurde.

Für den Phasenfaktor gilt in unserer Anordnung:

$$\varphi = \frac{L_2}{w_2} + \frac{L_3}{w_3} - w_3 C_3 - \frac{L_1 + L_1'}{w_1}.$$

Sind für gleiches φ die Konstanten der anderen Zweige beim einen Versuch L_{11}, L_{21}, L_{31}, w_{11}, w_{21}, w_{31}, C_{31}, beim andern L_{12}, L_{22} usw., so ergibt sich die Selbstinduktion L_1', die in beiden Fällen dieselbe geblieben ist, durch Gleichsetzung des φ aus:

$$L_1'\left(\frac{1}{w_{12}} - \frac{1}{w_{11}}\right) = \frac{L_{22}}{w_{22}} - \frac{L_{21}}{w_{21}} + \frac{L_{32}}{w_{32}} - \frac{L_{31}}{w_{31}}$$
$$- w_{32}C_{32} + w_{31}C_{31} - \frac{L_{21}}{w_{21}} + \frac{L_{11}}{w_{11}}.$$

Folgende Versuche wurden angestellt, um L_1' zu bestimmen:

I. $L_1 = 0{,}866 \cdot 10^{-6}$ H; $L_2 = 1{,}314 \cdot 10^{-6}$ H (berechnet).

Schleifkontakt	Drehkondensator	$w_1\,\Omega$	$w_2\,\Omega$	$w_3\,\Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$ H	$C_3 \cdot 10^{+9}$ F
— 2,2	31,1	15,53	23,45	332,9	1,006	0,751$_9$
— 3,1	51,5	15,55	23,44	333,9	1,506	1,204

II. $L_1 = 0{,}571 \cdot 10^{-6}$ H; $L_2 = 0{,}855 \cdot 10^{-6}$ H (berechnet).

Schleifkontakt	Drehkondensator	$w_1\,\Omega$	$w_2\,\Omega$	$w_3\,\Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$ H	$C_3 \cdot 10^{+9}$ F
— 1,3	27,6	10,10	15,27	332,8	1,006	0,672$_8$
— 2,0	47,6	10,12	15,25	333,5	1,506	1,122

Aus diesen vier Beobachtungen lassen sich durch verschiedene Kombination je zweier von ihnen auch vier Werte von L_1' berechnen. Faßt man zunächst die Versuche I, 1 und II, 1 zusammen, so fallen $-\frac{L_{31}}{w_{31}} + \frac{L_{32}}{w_{32}}$ weg; die vier Zeitkonstanten der Brückendrähte heben sich bis auf $-0{,}9 \cdot 10^{-9}$ auf, so daß:

$$L_1' = 0{,}729 \cdot 10^{-6}\,\text{H}.$$

Unter den gleichen Verhältnissen ergibt sich

aus I, 2 und II, 2: $L_1' = 0{,}728 \cdot 10^{-6}$ H;
aus I, 1 und II, 2: $L_1' = 0{,}698 \cdot 10^{-6}$ H,
aus I, 2 und II, 1: $L_1' = 0{,}753 \cdot 10^{-6}$ H.
Der Mittelwert ist: $L_1' = 0{,}73 \cdot 10^{-6}$ H (0,727).

Rechnet man vom Mittelwert $0{,}73 \cdot 10^{-6}$, so zeigen die Einzelbestimmungen gegen ihn die größte Abweichung $0{,}03 \cdot 10^{-6}$, d. h. $4\,^0/_0$. Dies erscheint für die Messung von φ nachteilig, da alle andern Größen, aus denen φ bestimmt wird, von größerer Genauigkeit sind. Doch ist zu bedenken, daß $\frac{L_1'}{w_1}$ ein Korrektionsglied und daher L_1' genügend genau bekannt ist. Übrigens ergibt sich dies aus der Überlegung, daß L_1' in derselben Anordnung wie φ gemessen wurde, also muß man L_1' so gut bestimmen können, wie man es sonst für die Messung von φ braucht.

Drittes Kapitel.

Messungen des Phasenfaktors.

Bei den Messungen des Phasenfaktors wurde untersucht, wie dieser von der aufgewundenen Drahtlänge, dem spezifischen Widerstand des Drahtes, dem Abstand der Windungen und dem Dielektrikum zwischen diesen abhängt.

§ 12.

Abhängigkeit von Drahtlänge und spezifischem Widerstand.

In diesem Paragraphen soll über Messungen an einer enggewickelten bifilaren Spule berichtet werden, deren zylindrischer

Kern aus Teakholz 30 cm lang und 3,5 cm dick war und deren Windungen aus Kupferdraht bestanden vom Durchmesser 0,1 mm blank, 0,13 mm besponnen.

Wie schon gelegentlich hervorgehoben, wurde zur Trennung von Kapazität und Selbstinduktion der Phasenfaktor für die gleiche Drahtlänge bei höherer und tieferer Temperatur gemessen und daher Kupferdraht wegen seines großen Temperaturkoeffizienten gewählt. Es durfte aber für jenen Zweck beim Übergang von höherer zu niedriger Temperatur keine Verschiebung der Windungen gegeneinander stattfinden. Dies tritt bei nicht genügend fest gewickelten Spulen, besonders bei solchen aus dünnem Draht, leicht ein und hat auch bei einer zuerst auf den Kern gewickelten Spule mitgewirkt. Die Messungen wurden trotzdem bei ihr durchgeführt, und die Resultate werden noch am Schluß dieses Paragraphen angegeben werden.

Der eben erwähnte Fehler war bei der zweiten möglichst festen Bewicklung desselben Spulenkerns vermieden; die wichtigsten Zahlen, aus denen bei diesen definitiven Messungen die Phasenfaktoren bestimmt wurden, sind im folgenden mitgeteilt.

A. Die 30 cm lange Spule hatte ungefähr 1590 Windungen, wie durch Abzählung an verschiedenen Stellen mit der Teilmaschine festgestellt wurde; wir nennen sie die „ganze Spule".

I. Mittlere Temperatur der Spule: 15,6°.

$$w_4 = 309{,}6\,\Omega.$$

$$L_1 = 1{,}170 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H};\quad L_1' = 0{,}727 \cdot 10^{-6};\quad L_2 = 1{,}314 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H}.$$

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\,\Omega$	$w_2\,\Omega$	$w_3\,\Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$ H	$C_3 \cdot 10^{+9}$ F	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
− 0,2	111,2	21,49	23,46	283,5	10 − 2 · 0,539[1])	2,593	— 766
— 0,3	166,9	21,48	23,45	283,6	1,006[2])	3,857	— 772
— 0,2	138,6	21,49	23,46	283,5	0,506[3])	3,224	— 768

II. Mittlere Temperatur der Spule: 8,8°.

$$w_4 = 301{,}4\,\Omega.$$

Die ausführliche Beschreibung dieses Versuchs ist schon in § 9 gegeben worden; die Resultate für φ waren:

$$1.\ \varphi = -735 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{sec};\quad 2.\ \varphi = -740 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{sec};$$

$$3.\ \varphi = -739 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{sec}.$$

B. Hierauf wurde von der Spule etwa ein Viertel der auf-

[1]) Selbstind. d. Kundt und seiner Zuleitungen.
[2]) 10^{-4}H-Normale mit Zul.
[3]) Selbstind. Variator Teilstr. 55.

gewundenen Drahtlänge von der Knickstelle aus abgewickelt und die beiden Drähte wieder verlötet. Drei Stellen der letzten Windungen an diesem Ende wurden mit Siegellack auf den Kern festgeklebt. Diese „Dreiviertelspule“ ist dann in gleicher Weise untersucht worden wie die „ganze“.

I. Mittlere Temperatur der Spule: 16,1°.

$w_4 = 233{,}7\ \Omega$.

$L_1 = 1{,}308 \cdot 10^{-6}$H; $L_1' - 0{,}727 \cdot 10^{-6}$H; $L_2 = 1{,}110 \cdot 10^{-6}$H.

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$H	$C_3 \cdot 10^{+9}$F	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
— 0,3	52,0	23,87	19,78	282,0	$10^{-2} \cdot 0{,}539$	1,211	— 369
+ 1,7	106,8	23,85	19,83	281,1	1,006	2,487	— 371
— 0,1	79,4	23,86	19,76	281,9	0,506	1,856	— 372

II. Mittlere Temperatur der Spule: 8,8°.

$w_4 = 226{,}8\ \Omega$.

L_1, L_1' wie unter I, $L_2 = 1{,}091 \cdot 10^{-6}$H.

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$H	$C_3 \cdot 10^{+9}$F	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
+ 0,1	48,1	23,87	19,22	281,5	$10^{-2} \cdot 0{,}539$	1,130	— 345
0,0	102,6	23,87	19,23	281,5	1,006	2,388	— 344
— 0,3	75,7	23,88	19,22	281,7	0,506	7,171	— 348

C. In gleicher Weise, wie vorher unter B angegeben, wurde jetzt eine etwa 15 cm lange Spule hergestellt, die „halbe Spule“.

I. Mittlere Temperatur der Spule: 8,8°.

$w_4 = 152{,}4\ \Omega$.

L_1, L_1' wie bei B, $L_2 = 0{,}733 \cdot 10^{-6}$H.

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$H	$C_3 \cdot 10^{+9}$F	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
— 0,2	61,1	23,86	12,79	284,3	1,006	1,428	— 80
+ 1,4	34,9	23,84	12,82	283,4	0,506	0,826,	— 84
+ 1,8	89,1	23,83	12,83	283,1	1,506[1])	2,073	— 82

[1]) 10^{-4}H-Normale + S. J. Var. Teilstr. 55 in Serie geschaltet; in diesem Fall war eine sichere Einstellung mit Kundt und Drehkond. allein nicht mehr möglich.

II. Mittlere Temperatur der Spule: 16,3°.

$w_4 = 157{,}2\ \Omega$.

L_1, L_1' wie unter B, $L_2 = 0{,}749 \cdot 10^{-6}$H.

Schleif-kont.	Dreh-kond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$H	$C_3 \cdot 10^{+9}$F	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
+0,3	9,3	23,87	13,19	284,5	$10^{-2} \cdot 0{,}539$	0,260$_5$	— 101
+0,2	63,5	23,87	13,19	284,6	1,006	1,481	— 97
—1,0	37,1	23,88	13,16	285,3	0,506	0,882$_3$	— 103

D. Die Spule wurde bis zu einem Viertel der ursprünglichen abgewickelt: „Viertelspule".

I. Mittlere Temperatur der Spule: 16,9°.

$w_4 = 78{,}90\ \Omega$.

L_1, L_1' wie bei B, $L_2 = 0{,}481 \cdot 10^{-6}$H.

Schleif-kont.	Dreh-kond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$H	$C_3 \cdot 10^{+9}$F	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
+0,7	65,5	23,94	8,436	223,9	1,006	1,524	+ 80
+0,3	20,0	23,95	8,428	224,2	0,506	0,498$_7$	+ 86
—0,25	107,3	23,95	8,415	224,5	1,506	2,498	+ 82

II. Mittlere Temperatur der Spule: 9,0°.

$w_4 = 76{,}40\ \Omega$.

L_1, L_1' wie unter B, $L_2 = 0{,}465 \cdot 10^{-6}$H.

Schleif-kont.	Dreh-kond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$H	$C_3 \cdot 10^{+9}$F	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
— 0.8	62,5	23,90	8,149	224,1	1,006	1,456	+ 94
— 1,1	17,8	23,90	8,143	224,3	0,506	0,447$_6$	+ 97
— 1,5	105,2	23,90	8,135	224,5	1,506	2,447	+ 93

Neben diesen endgültigen Messungen sind, wie schon erwähnt, in gleicher Weise solche bei der zuerst auf denselben Kern gewickelten Spule vorgenommen worden, bei der sich die Windungen während der Untersuchung sichtbar lockerten. Da dieser Fehler über die Verhältnisse, von denen φ abhängt, einigen Aufschluß gibt, mögen allein die Resultate hier angeführt werden.

Spule	Temp.	Widerst. w_4 (Ω)	$\psi \cdot 10^{+9}$ sec		
„Ganze“	17,5°	311,4	— 767	— 775	— 766
	9,3°	301,4	— 708	— 707	— 711
„Dreiviertel“	16,4°	237,1	— 348	— 356	— 354
	9,0°	230,1	— 323	— 330	— 327
„Halbe“	17,1°	153,4	— 59	— 55	59
	8,9°	148,5	— 37	— 34	— 32
„Viertel“	18,0°	83,32	+ 122	+ 125	+ 119
	9,0°	80,39	+ 135	+ 138	+ 130

Der Vergleich dieser Ergebnisse mit den früheren zeigt, wie sehr die Lockerung der Windungen auf den Phasenfaktor von Einfluß ist (§ 15).

§ 13.

Einfluß des Windungsabstandes.

Die Kapazität eines Kondensators ist umgekehrt proportional dem Abstand der Platten. Da die Kapazität der Spulen auf einer Kondensatorwirkung zwischen den geladenen Oberflächen der Drähte beruht, wird auch deren Abstand einen ähnlichen Einfluß haben wie derjenige der Belegungen beim Kondensator; dies muß sich also in der Größe des Phasenfaktors geltend machen, der ja nach seiner Definition $\varphi = \frac{L}{w} - wC$ die Eigenkapazität C enthält. Um in dieser Hinsicht einen Vergleich mit den früheren Resultaten vornehmen zu können, wurde folgender Weg eingeschlagen.

Auf einem 30 cm langen Kern aus Teakholz vom Durchmesser 3,5 cm werden zuerst vier bespommene Kupferdrähte von gleicher Art wie im vorigen Paragraphen (0,1 mm blank, 0,13 mm besponnen) immer in derselben Reihenfolge nebeneinander aufgewickelt und der zweite und vierte Draht wieder herausgenommen. Bei dem Aufspulen waren die Windungen der Drähte an einer schmalen Stelle längs des Spulenkerns mit einer dünnen Schicht Schellack festgemacht. Die beiden jetzt noch auf dem Kern sitzenden Drahthälften wurden am einen Ende verlötet, und man hatte damit eine bifilare Spule von gleichem Material wie sonst, nur mit größerem Windungsabstand.[1]) Dieser ist aber

[1]) Herr Institutsmechaniker W. Sinz hat bei der mühevollen Wicklung dieser und der anderen Spulen viel Geduld gehabt, wofür ich ihm bestens danke.

nicht, wie man zuerst schließen wird, zwei Durchmesser des besponnenen Drahtes, sondern größer, da die Windungen von vornherein nicht ganz dicht aufeinander sitzen. Das ergab sich schon bei den früheren enggewickelten Spulen, bei denen man nicht aus der Länge des Kerns und dem Durchmesser des besponnenen Drahtes ihren Widerstand ausrechnen konnte; die Windungszahl, die man dabei erhält, ist um ziemlich viel größer als die Zahl der wirklich vorhandenen 1590 Windungen.

Ein Beweis für die starke Abhängigkeit des φ von der gegenseitigen Lage der Windungen ist ja schon in dem Unterschied der Messungen des vorigen Paragraphen vorhanden, und zwar zeigte sich, daß die Lockerung der Windungen eine Zunahme des φ im positiven Sinne hervorbringt (§ 15).

Bei der vorher beschriebenen Spule mit weiter Wicklung ist aber dieser Fehler auch aufgetreten; für die erste Messung bei tieferer Temperatur wird die ursprüngliche Lage der Windungen wohl erhalten geblieben sein. Durch rasches Herausziehen der Spule aus dem gekühlten Gefäß wurden die Drähte schnell ausgedehnt und lockerten sich an den Stellen, wo sie auf dem Holzkern nur auflagen. Bei der darauffolgenden Messung bei höherer Temperatur waren daher die genau gleichen Verhältnisse bezüglich des Windungsabstands nicht mehr erhalten.

I. Mittlere Temperatur der Spule: 9,0°.

$$w_4 = 147{,}0\,\Omega.$$

$$L_1 = 1{,}308 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H};\quad L_1' = 0{,}727 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H};\quad L_2 = 0{,}880 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H}.$$

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\,\Omega$	$w_2\,\Omega$	$w_3\,\Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}\,\mathrm{H}$	$C_3 \cdot 10^{+9}\,\mathrm{F}$	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
— 0,1	58,8	23,87	15,76	222,8	1,006	1,370	— 125
— 0,8	11,8	23,90	15,75	223,1	0,506	0,318,	+ 126
— 1,2	100,7	23,90	15,74	223,2	1,506	2,344	+ 123

II. Mittlere Temperatur der Spule: 16,4°.

$$w_4 = 151{,}6\,\Omega.$$

L_1, L_1' wie unter I, $L_2 = 0{,}917 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H}$.

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\,\Omega$	$w_2\,\Omega$	$w_3\,\Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}\,\mathrm{H}$	$C_3 \cdot 10^{+9}\,\mathrm{F}$	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec
— 0,5	58,7	23,87	16,24	223,2	1,006	1,374	+ 115
— 1,1	12,9	23,90	16,22	223,6	0,506	0,343,	+ 121
— 1,9	100,7	23,93	16,19	224,0	1,506	2,343	+ 119

Zwischen beiden Versuchsreihen ist deutlich das Kleinerwerden von φ für die höhere Temperatur zu beobachten, wie es dem

größeren Widerstand entsprechend bei positivem Phasenfaktor auch sein muß (§ 15). Jedoch scheint der Unterschied zu gering zu sein, was wohl auf die erwähnte Verschiebung der Windungen zurückzuführen ist. Tatsächlich hat ein dritter Versuch, der nach dem zuletzt mitgeteilten gemacht wurde, bei niedriger Temperatur (8,65°) für den Phasenfaktor folgende Werte ergeben: $\varphi = 130$; 133; $128 \cdot 10^{-9}$ sec, die also größer sind als die unter I. Es ist allerdings früher bei der mittleren Temperatur 9,0° beobachtet worden, d. h. bei einem etwas höheren Widerstand (147,0 Ω statt 146,6 Ω), so daß eine Verschiebung von φ in dem gefundenen Sinn eintreten müßte. Doch ist der Temperaturunterschied viel zu klein, als daß solche Veränderungen des Phasenfaktors dadurch bedingt würden.

Es wird aber bei der benutzten Drahtdicke nicht möglich sein, die Drähte in genauerem Abstand zu wickeln, als hier geschehen; man kann auch nicht für eine bessere Befestigung der Windungen auf der Unterlage sorgen, da sonst eine Änderung des Isolationsmaterials hiermit verbunden wäre.

§ 14.

Einfluß des Dielektrikums zwischen den Windungen.

Von der Spulenkapazität kann man eine Zunahme mit der Dielektrizitätskonstanten des Mediums zwischen den Windungen erwarten. Dies hat sich in der Tat schon bei Vorversuchen gezeigt. Eine zweischichtige Manganinspule, nach Chaperon gewickelt, also mit geringer Selbstinduktion, hatte eine Kapazität, die in einer Wheatstoneschen Brücke im gegenüberliegenden Zweig durch eine kleine Selbstinduktionsspule von der Größenordnung $6 \cdot 10^{-6}$ Henry ausgeglichen werden konnte, wie sich am Vibrationsgalvanometer feststellen ließ. Wenn man die Manganinspule in Nitrobenzol ($\varepsilon = 36$) tauchte, war ihre Kapazität derart vergrößert, daß sie erst mit dem Selbstinduktionsvariator, d. h. mit der Größenordnung 10^{-5} Henry kompensiert wurde.[1]) Auf dieser Tatsache lassen sich keine Messungen begründen, da das Nitrobenzol immer noch zu viel leitet; es treten zwischen den Drähten durch das Nitrobenzol hindurch Ströme auf, die den Widerstand verkleinern. Eine ähnliche Vergrößerung der Kapazität wurde auch in der Meßanordnung für φ durch Eintauchen einer bifilaren Manganinspule in Paraffinöl gefunden; im Drehkondensator mußte dann mehr eingeschaltet werden als vorher.

[1]) Die Selbstind. des geraden (nicht bifilaren) Brückendrahtes, die der Zuleitungen, die gegenseitigen Induktionen spielen hier noch mit (§ 10).

Um aber solche Einflüsse mit den früheren Resultaten vergleichen zu können, wurde folgendermaßen vorgegangen. Die Spule wurde mit dem gleichen Kupferdraht wie alle übrigen bifilar gewickelt; jedoch ist unmittelbar vor dem Aufwickeln jeder der Drähte mit Schellack etwa 10 cm lang angestrichen, in feuchtem Zustand aufgewunden und möglichst an die schon aufgespulten Drähte gepreßt worden. Der zylindrische Kern war wieder Teakholz, und zwar 18,2 cm lang, 3,5 cm dick; der daraufgewickelte Draht hatte bei 17,0° einen Widerstand von 182 Ω. Der Phasenfaktor für die ganze Spule ist auch bestimmt worden, doch sind diese (ersten) Versuche, da bei ihnen die Selbstinduktion der damals verdrillten Zuleitungen Z zum Rheostaten R_1 nicht berücksichtigt wurden, nicht zu gebrauchen.[1]) Später ist ein Kontaktfehler an der Spule aufgetreten; sie wurde deshalb auseinandergeschnitten und für den größeren Teil der Phasenfaktor bei niedriger und höherer Temperatur bestimmt, aber nur zwei Einzelmessungen in jedem Fall gemacht. Diese genügen aber doch, um das Verhalten der Spule gegen die früher untersuchten zu kennzeichnen. Es wurde einmal für L_3 nur die Selbstinduktionsnormale zu dem Kundtschen Widerstand geschaltet, das andere Mal außer der Normalen eine aus Litzendraht gewickelte schellackierte Spule von 70 Windungen, die 0,36 Ω Widerstand hatte und deren Selbstinduktion mit Hilfe des Variators zu $0{,}366_3 \cdot 10^{-4}$ Henry gemessen war.

I. Mittlere Temperatur der Spule: $+18{,}0°$.

$w_4 = 97{,}70\ \Omega$.

$L_1 = 1{,}308 \cdot 10^{-6}$ H, $L_1' = 0{,}727 \cdot 10^{-6}$ H, $L_2 = 0{,}594 \cdot 10^{-6}$ H.

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$ H	$C_3 \cdot 10^{+9}$ F	$q \cdot 10^{+9}$ sec
— 8,7	88,6	24,03	10,61	221,1	1,006	2,055	— 28
— 9,6	121,1	24,05	10,60	221,6	1,373	2,807	— 30

II. Mittlere Temperatur der Spule: 8,9°.

$w_4 = 93{,}84\ \Omega$.

L_1, L_1' wie unter I, $L_2 = 0{,}562 \cdot 10^{-6}$ H.

Schleifkont.	Drehkond.	$w_1\ \Omega$	$w_2\ \Omega$	$w_3\ \Omega$	$L_3 \cdot 10^{+4}$ H	$C_3 \cdot 10^{+9}$ F	$q \cdot 10^{+9}$ sec
+ 3,8	86,3	23,76	10,09	221,0	1,006	2,005	— 19
+ 3,5	118,1	23,75	10,08	220,8	1,373	2,738	— 14

[1]) Die unkorrigierten Werte liegen für höhere Temp. bei $-310 \cdot 10^{-9}$ sec.

Die Übereinstimmung der unter I erhaltenen Resultate ist gut, die unter II nicht schlechter als sonst, da man hier wie auch sonst bedenken muß, daß es vor allem auf die Differenz von $\frac{L_3}{w_3}$ und $w_3 C_3$ ankommt. Allgemein kann in dieser Hinsicht zu den in den letzten drei Paragraphen mitgeteilten Werten von φ folgendes gesagt werden: Wenn auch die Kapazität des Drehkondensators C_3 sich auf $2\,^0/_0$ richtig bestimmen läßt, so brauchen die Resultate von φ nicht von gleicher Güte zu sein. Besonders in der Umgebung von $\frac{L_3}{w_3} - w_3 C_3 = 0$ werden die Fehler größer sein; dagegen sind die Abweichungen, wie sie sich bei großen negativen φ ergeben, wegen der dabei in erster Linie ins Gewicht fallenden Kapazität des Drehkondensators von der Größenordnung seiner Einstellungsgenauigkeit.

§ 15.

Diskussion der Resultate.

In der folgenden Tabelle sind für die enggewickelte Spule, deren Windungen sich gelockert hatten (S. 43), die Resultate für tiefere Temperatur noch einmal zusammengestellt:

Temp.	Widerstand (Ω)	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec			$\overline{\varphi} \cdot 10^{+9}$	$\lvert\overline{\varphi} - \varphi\rvert_{\max}$ in $^0/_0$
9,3	301,4	— 708	— 707	— 711	— 709	0,4
9,0	230,1	— 323	— 330	— 327	— 327	1,2
8,9	148,5	— 37	— 34	— 32	— 34	8,8
9,0	80,39	+ 135	+ 138	+ 130	+ 134	3,0

Dabei ist $\overline{\varphi}$ als Mittel der drei Einzelbestimmungen von φ genommen. In der äußersten rechten Kolonne sind die größten Abweichungen der gefundenen φ von ihrem Mittelwert in $^0/_0$ von diesem angegeben, und es bestätigt sich dabei die Bemerkung am Schluß des letzten Paragraphen. Die Werte von $\overline{\varphi}$ sind in Fig. 7 (vgl. die Kurventafeln am Schluß) als Funktion des Widerstands der Spule aufgetragen, der auch für die einzelnen Punkte wegen der genügend konstanten Temperatur zu demselben spezifischen Widerstand gehört.

Die Resultate der endgültigen Messungen des § 12, bei der die Verschiebung der Windungen nicht auftrat, sind in den folgenden Tabellen gerade so wie vorher zusammengestellt.

I. Höhere Temperatur.

Temp.	Widerstand (Ω)	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec			$\bar{\varphi} \cdot 10^{+9}$	$\lvert\bar{\varphi} - \varphi\rvert_{\max}$ in %
15,6	309,6	— 766	— 772	— 768	— 769	0,4
16,1	233,7	— 371	— 369	— 372	— 371	0,5
16,3	157,2	— 97	— 103	— 101	— 100	3,0
16,9	78,90	+ 80	+ 86	+ 82	+ 82	3,5

II. Tiefere Temperatur.

Temp.	Widerstand (Ω)	$\varphi \cdot 10^{+9}$ sec			$\bar{\varphi} \cdot 10^{+9}$	$\lvert\bar{\varphi} - \varphi\rvert_{\max}$ in %
8,8	301,3	— 735	— 740	— 739	— 738	0,4
8,8	226,8	— 345	— 344	— 348	— 346	0,6
8,8	152,4	— 80	— 84	— 82	— 82	2,4
9,0	76,40	+ 94	+ 97	+ 95	+ 95	3,2

Bei I finden sich Temperaturunterschiede von 1,3°; dagegen ist die Übereinstimmung bei II eine genügend gute. Man kann daher aus der letzten Tabelle die Werte von $\bar{\varphi}$ als Funktion des Widerstands der Spule auftragen, wie es in Kurve 8 (s. unten S. 55) geschehen ist, und dabei diesen der Drahtlänge proportional setzen. Angenähert wird das auch bei der Tabelle I stattfinden, deshalb sind diese Werte in Fig. 9 (s. unten S. 56) als Funktion von w eingezeichnet. Alle drei Kurven, auch die erste, zeigen eine gut ausgeprägte parabolische Form.

Aus den beiden letzten Tabellen ist zu ersehen, daß durch Zunahme des spezifischen Widerstands der Phasenfaktor verkleinert wird; ist er negativ, so wird er negativ größer; ist er positiv, so nimmt er nach Null ab. Die Kurven schneiden die w-Achse in einem Punkt $\varphi = 0$, der für die erste etwa bei $w_0 = 137\,\Omega$, bei der zweiten bei $w_0 = 122\,\Omega$, bei der dritten bei $w_0 = 119\,\Omega$ liegt. Da Kurve 7 und 8 bei gleicher Temperatur aufgenommen sind, also auch gleichem spezifischen Widerstand entsprechen, rückt der Nullpunkt von φ für die gelockerten Windungen nach größeren Werten von w, also auch nach größeren Drahtlängen hin. Dies bedeutet, daß hierbei der Phasenfaktor überhaupt schneller positiv wird, wenn die Drahtlänge abnimmt. Nach der Definition des Phasenfaktors $\varphi = \frac{L}{w} - w\,C$ hängt das also entweder mit einer Vergrößerung von L oder einer Verkleinerung von C zusammen oder am wahrscheinlichsten mit einer gleichzeitigen Änderung von L und C in jenem Sinn.

Wie sehr der Phasenfaktor vom Windungsabstand abhängt, hat sich besonders deutlich durch die Messungen des § 13 ergeben. Da die ersten drei von diesen (I S. 44) bei nahezu der gleichen Temperatur gemacht wurden wie die in Fig. 8 eingetragenen Resultate, kann man sich den Mittelwert jener, $\varphi = 125 \cdot 10^{-9}$ sec, an der Stelle $w_4 = 147{,}0\,\Omega$ in die Kurve eintragen. Man sieht, daß dieser Punkt (*) darüber hinwegfällt in der Richtung der positiven φ-Achse. Dieses leichtverständliche Resultat ist auf die vorher erwähnten Änderungen von L und C zu schieben.

In der Ebene der Kurve 8 ist auch noch das Ergebnis des § 14 eingezeichnet, d. h. die Größe des Phasenfaktors bei der gleichen tiefen Temperatur für die schellackierte Spule. Es zeigt sich, daß der betreffende Punkt (□) $\varphi = -17 \cdot 10^{-9}$ sec für $w = 97{,}80\,\Omega$ unterhalb der Kurve zu liegen kommt. Da die Windungen dieser Spule wegen des Schellackierens nicht so eng aufeinander sitzen können wie im Falle der Kurve, müßte nach dem Vorigen L größer und C kleiner geworden sein. Wenn trotzdem φ nach den negativen Werten zu liegt, ist das auf die Vergrößerung der Kapazität C durch die dielektrische Wirkung des Schellacks zurückzuführen.

Der Zweck der Beobachtung derselben Spule bei höherer und niedriger Temperatur war der, ihre Kapazität und Selbstinduktion aus den verschiedenen Phasenfaktoren zu bestimmen, um damit über die Abhängigkeit dieser Größen von der Drahtlänge etwas aussagen zu können. Zu dieser Trennung ist notwendig, daß L und C bei der Temperaturänderung konstant bleiben. Tritt keine Verschiebung der Windungen ein, so kann man die Selbstinduktion, die nur von der Stromführung, der Drahtlänge und dem Windungsabstand abhängt, beim Übergang von höherer zu tieferer Temperatur als unveränderlich (bei unserer Wechselzahl) ansehen. Die Konstanz der Kapazität möge hier nur durch den Vergleich mit der geradlinigen Doppelleitung plausibel gemacht werden.

Wenn eine Doppelleitung von der Länge a am einen Ende kurzgeschlossen ist und für ihre Längeneinheit w, l, k Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität sind, so ist ihr Phasenfaktor bei Vernachlässigung von $\omega^2 l\,k\,a^2$ (S. 34):

$$\varphi = \frac{l}{w} - \frac{1}{3} k\,a \cdot w\,a\,.$$

Auch bei bifilaren Drähten nimmt die gegenseitige Spannung von dem kurzgeschlossenen Ende bis zu den beiden Enden der Stromzuleitungen zu. Die Kapazität der Längeneinheit ist aber definiert durch:

$$k = \frac{\varepsilon}{4\,c^2 \log \frac{d + \sqrt{d^2 - 4r^2}}{2r}} \text{ (elmagn.)},$$

wo d den Abstand der Drähte, r ihr Radius, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet; k hängt nur von den Dimensionen des Systems und der Dielektrizitätskonstanten ε des Mediums zwischen den Drähten ab und gibt die Größe derjenigen Ladung an, die auf der Längeneinheit von zwei nicht kurzgeschlossenen Paralleldrähten allein vermöge der Influenz sitzt, wenn ihre gegenseitige Spannung 1 Volt beträgt. Die Gesamtkapazität einer solchen offenen Doppelleitung ist einfach ka. Dem Kurzschluß am einen Ende wird in der Formel für φ einmal durch den Faktor $\frac{1}{3}$ Rechnung getragen, weiter aber den von der Verbindungsstelle an wachsenden Spannungen und Ladungen dadurch, daß der Kapazitätseinfluß, d. h. das negative Glied von φ, proportional dem Gesamtwiderstand wa ist. Die Betrachtung von Orlich[1]) hat den Zweck, die gleichmäßig über die offene Doppelleitung verteilte berechenbare Kapazität zu beziehen auf den Fall der ungleichartig verteilten bei der kurzgeschlossenen Bifilarleitung.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei den bifilaren Spulen, nur wird hier das Problem komplizierter wegen der doppelten Kapazitätswirkung jedes Drahtes gegen seine beiden Nachbarwindungen. Der Bau des Phasenfaktors $\varphi = \frac{L}{w} - wC$ (w = Gesamtwiderstand) zeigt, daß auch jetzt der Kapazitätseinfluß, das negative Glied $-wC$, dem Widerstand w proportional ist. C selbst wird, wie bei der Doppelleitung, nur von den Dimensionen der Spule und der Dielektrizitätskonstanten der Isolation abhängen, nicht aber von w. Es ist jedoch ohne besondere theoretische Betrachtungen nicht möglich, C auf die statische Ladung zu beziehen, welche die Drähte aufnehmen würden, wenn sie nicht durch die Knickstelle leitend verbunden wären.[2])

Setzt man auf Grund dieser Überlegungen voraus, daß C während der Abkühlung konstant bleibt und sich hierbei die gegenseitige Anordnung der Windungen nicht ändert, so kann man die Trennung von C und dem gleichfalls konstanten L vor-

[1]) Orlich, Kap. u. Ind. S. 136.

[2]) Die genauere theoretische Nachrechnung ergibt sich aus der zit. Arbeit von W. Lenz.

nehmen. Die auf die niedrige Temperatur bezüglichen Größen seien durch den Index t, die auf die höhere bezüglichen durch T gekennzeichnet. Dann ist:

$$C = \frac{\varphi_t \, w_t - \varphi_T \, w_T}{w_T^2 - w_t^2} .$$

Für die gefundenen Werte von φ bei der Spule des § 12, bei der die notwendige Bedingung des unveränderten Windungsabstands bei der Temperaturänderung erfüllt war, ist die Trennung von L und C durchgeführt worden. Man kann dabei nicht allzu große Genauigkeit erwarten, da es sich hier um Differenzen handelt, bei denen die letzten schon unsicheren Stellen der φ, in 10^{-9} sec ausgedrückt, stark ins Gewicht fallen, also besonders der Zähler von C unsicher ist. Das gleiche gilt, wenn auch nicht in demselben Maß, von den Widerständen. Es ergab sich folgendes:

Spule	$C \cdot 10^{+3}$ MF	$L \cdot 10^{+5}$ H
Ganze	3,10	5,91
Dreiviertel	2,59	5,47
Halbe	2,17	3,78
Viertel	1,83	1,79

Trägt man die Werte der C und L als Funktion der zugehörigen Länge, d. h. des mit dieser proportionalen Widerstands w_t auf, so ergeben sich die Kurven 10 und 11 (s. unten). Die Selbstinduktionswerte L (Fig. 11) verteilen sich um eine Gerade, zwei von ihnen liegen auf der einen, zwei auf der andern Seite.[1]) Ihre Verlängerung geht nicht durch den Nullpunkt, sondern schneidet die positive L-Achse bei etwa $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ Henry. Da für $w = 0$ die Kurve natürlich durch den Anfang geht, müßte also für die ersten 50 Ω ein stärkerer Anstieg als später zu erwarten sein. Dies wäre nicht unmöglich, weil für kürzere Bifilarspulen die einfache Proportionalität des L mit der Drahtlänge nicht zuzutreffen braucht; es könnten vielmehr die gleichen Verhältnisse sich ergeben wie bei gewöhnlich ge-

[1]) Für die Werte von L ist die Gerade auch nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgerechnet worden; bei ihr liegen die ersten drei Punkte (von links) ganz nahe bei ihr, der letzte allein weiter weg, sie schneidet auf der L-Achse $-0{,}1 \cdot 10^{-5}$ H ab. Diese Gerade ist unwahrscheinlicher als die gezeichnete. Die Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist ohne Rücksicht auf das Gewicht der einzelnen Messungen ausgeführt, woraus sich ihr unbefriedigendes Resultat erklärt.

wickelten Spulen mit großer Selbstinduktion, für die bei kleiner Spulenhöhe eine schnellere Zunahme der Selbstinduktion stattfindet als bei größerer.

Die Werte der Kapazitäten geben ebenfalls einen linearen Anstieg (Kurve 10); aber auch hier geht die Verlängerung der Geraden nicht durch den Anfangspunkt. Dies müßte auf ähnliche Umstände zurückzuführen sein wie bei L.

Wie sehr es bei der Trennung auf die Genauigkeit der letzten Stellen der φ ankommt, kann man daraus erkennen, wenn man statt der Mittelwerte $\bar{\varphi}$ die Einzelbeobachtungen φ dabei verwendet. In der Kurve für C (Fig. 10) ist das Fehlergebiet eingezeichnet, das erhalten wird durch Kombination des maximalen φ_t und des minimalen φ_T und dann durch die des kleinsten φ_t und des größten φ_T, also durch Zusammenfassung der für die Trennung möglichst schlechtesten Werte. Die obere Grenze des schraffierten Fehlergebietes kommt als zu unwahrscheinlich nicht in Betracht, die andere liegt der Geraden durch den Nullpunkt nahe (in Kurve 10 punktiert). Trotzdem scheint die Kurve, die aus den Mittelwerten von φ gewonnen ist, die tatsächlichen Verhältnisse wiederzugeben, da die aus diesen Kapazitätswerten gerechneten L ohne größere Fehler den wahrscheinlich linearen Anstieg zeigen. Für höhere Widerstände wird für die L deren gleichfalls eingezeichnetes Fehlergebiet (vgl. Kurve 11), das man durch Berechnung der zugehörigen L-Werte aus den Grenzpunkten des Fehlergebiets von Kurve 10 erhält, gerade breit; denn bei $L = \varphi w + w^2 C$ kommen die Abweichungen der C wegen des Faktors w^2 bei größeren Widerständen immer stärker in Betracht.

Ferner muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß sich für den Mittelpunkt der φ-Kurve 2 das Verhältnis von L und C aus den Mittelwertskurven ungefähr richtig ergibt. Aus Kurve 8 folgt, daß $\varphi = 0$ für etwa $w_0 = 122\,\Omega$ wird; für diesen Widerstand ist also $\frac{L_0}{w_0} - w_0 C_0 = 0$, d. h. $w_0^2 = \frac{L_0}{C_0} = 122^2$. Aus den Mittelwertskurven ergibt sich für $w_0 = 122\,\Omega$: $\frac{L_0}{C_0} = \frac{2{,}95 \cdot 10^{-5}}{2{,}03 \cdot 10^{-9}} = 1{,}21^2 \cdot 10^4$. Die nahe Übereinstimmung spricht mit für die Zuverlässigkeit unserer Mittelwertskurven.

Das gleiche Resultat erhält man aus dem Nullpunkt der φ-Kurve in Fig. 9, d. h. für den Widerstand $w_0' = 119\,\Omega$, dem bei dem Temperaturkoeffizient 0,0039 bei 8,9° 115,5 Ω in Fig. 8 entspricht. Für diesen Wert entnimmt man den Mittelwerts-

kurven $\frac{L_0'}{C_0'} = \frac{2{,}85 \cdot 10^{-5}}{2{,}0 \cdot 10^{-9}} = 1{,}19^2 \cdot 10^4$, also den Kurvenwert $w_0'^2 = 119^2$.[1])

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß nach der einfachen Formel[2]) für die Selbstinduktion der bifilaren Doppelleitung bei der halben Drahtlänge der „ganzen Spule" $a = 8710$ cm und dem Verhältnis Windungsabstand: Drahtradius $\frac{d}{r} = 3{,}78$ sich $L = 5{.}51 \cdot 10^{-5}$ Henry ergibt. Bei der Trennung war oben für die „ganze Spule" gefunden $L = 5{,}91 \cdot 10^{-5}$ H, aus der Kurve folgt $6{,}3 \cdot 10^{-5}$ H: die Größenordnung stimmt überein, die beiden letzten Zahlenwerte sind nur etwas größer. Dies mag eine Folge der doppelten Selbstinduktionswirkung jedes Drahtes gegen seine beiden Nachbardrähte sein; es konzentriert sich zwar das magnetische Feld zwischen je zwei Drähten, durch die beiderseits nächsten Drähte wird aber ein kleinerer Teil wieder aufgehoben, wie man leicht einsieht, wenn man sich die Kraftlinien von vier nebeneinanderliegenden Drahtquerschnitten konstruiert.

Ähnlich findet man bei einer einseitig kurzgeschlossenen Doppelleitung von der halben Drahtlänge a der „ganzen Spule" und dem Verhältnis $\frac{d}{r} = 3{,}78$ als Kapazität:

$$C = \frac{1}{3} a \cdot \frac{\varepsilon\,(=1)}{4c^2 \log \frac{d + \sqrt{d^2 - r^2}}{2r}} \text{(elmagn.)} = 6{,}39 \cdot 10^{-19} = 6{,}39 \cdot 10^{-4} \text{ MF.}$$

Nach der Trennungsmethode war für die Kapazität der „ganzen Spule" gefunden $3{.}01 \cdot 10^{-3}$ MF, also ein 4,7mal größerer Wert. Wenn auch die Dielektrizitätskonstante der Seide zu klein angenommen wurde, wobei zu bedenken ist, daß diese die Zwischenräume der Drähte nicht ganz ausfüllt, so spricht doch der Wert $3{.}01 \cdot 10^{-3}$ MF für die gesteigerte Kapazitätswirkung jedes Drahtes nach zwei Seiten.

In dem Phasenfaktor der Spulen ist allerdings der Einfluß ihrer Zuleitungen mitgemessen. Diese sind bifilar geführt, so daß sich ihre Selbstinduktion zu $1{,}76 \cdot 10^{-6}$ H, ihre Kapazität zu $1{,}26 \cdot 10^{-11}$ F berechnet. Die letztere beträgt also weniger als 1 % der kleinsten Spulenkapazität und braucht deshalb nicht berücksichtigt zu werden. Dagegen ist der Anteil der Selbst-

[1]) Dieses und das vorige Ergebnis sind zuerst Mittelwerts- und φ-Kurven entnommen worden, die in größerem Maßstab als in dem unten veröffentlichten gezeichnet waren.

[2]) vgl. S. 35.

induktion der Zuleitungen bei der Viertelspule 10 %, und dieser wäre von dem erhaltenen Resultat für L zu subtrahieren. Bei den größeren Spulen verringert er sich bis auf 3 %, da die Zuleitungen immer die gleichen geblieben sind. Der Abzug dieser Selbstinduktion würde für die L-Werte der Spule (Kurve 11) einen nur sehr wenig steileren Anstieg ergeben, im übrigen aber bei der erreichten Genauigkeit nichts Wesentliches ändern, so daß wir in den beiden Kurven 10 und 11 den Einfluß der Zuleitungen vernachlässigen können.

Die Spule mit weiter Wicklung eignet sich nicht zur Trennung von L und C, da, wie gesagt, die Windungen während der Versuche ihre Lage etwas geändert haben. (Die Ausrechnung liefert $C = 0{,}35 \cdot 10^{-3}$ MF, $L = 2{,}59 \cdot 10^{-5}$ H; trotz des zu erwartenden kleinen C ist aber L zu klein.) Auch die schellackierte Spule kann zu diesem Zwecke nicht verwandt werden wegen der Kleinheit von w und φ. (Es ergab sich $C = 1{,}74 \cdot 10^{-3}$ MF. $L = 1{,}38 \cdot 10^{-5}$ H; beide sind für $w = 93{,}8\ \Omega$ kleiner, als zu erwarten.) Man erhält aber aus der Kurve 8 ein deutliches Bild von der Kapazitätssteigerung durch den Schellack einfach aus der Lage von φ, wovon schon (S. 49) die Rede war.

Überhaupt ist ja die Messung des Phasenfaktors als das Exakte anzusehen. Dieser ist außerdem das praktisch Wichtige, da er neben dem Widerstand den Widerstandsoperator bestimmt, und hierin liegt für alle Arbeiten mit Bifilarspulen seine Bedeutung.

Die Trennung von L und C hat mehr theoretisches Interesse; doch sind die Fehler, die der Bestimmung von φ anhaften, meist noch zu groß, um jene mit der wünschenswerten Genauigkeit ausführen zu können. Die Bestimmung der Selbstinduktion und Kapazität wird bei höheren Widerständen, also bei den rechts liegenden Punkten der Mittelwertskurven, sicherer als bei kleineren. Beträchtlichere Differenzen $\varphi_T w_T - \varphi_t w_t$ wären dann zu erreichen, wenn die Temperaturunterschiede erheblicher gemacht und dabei die vorhandenen technischen Schwierigkeiten, vor allem das Herausquellen der Windungen, vermieden würden. Immerhin genügen bereits die hier beschriebenen Messungen nicht nur um das Vorhandensein von Kapazitätswirkungen sicherzustellen, sondern sie geben auch die Größenordnung der Eigenkapazität an und lassen deren Abhängigkeit von den sie bestimmenden Faktoren überblicken.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

Fig. 7.

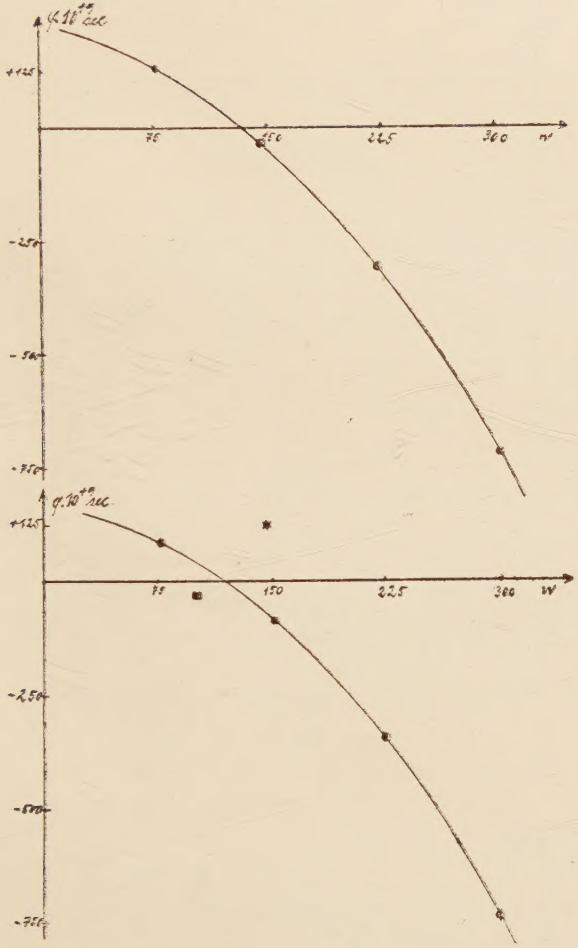

Fig. 8.

* Weitere Wicklung.

⊡ Schellackierte Spule.

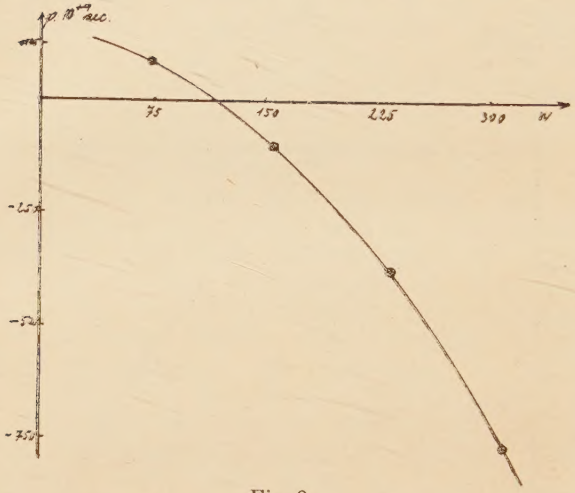

Fig. 9.

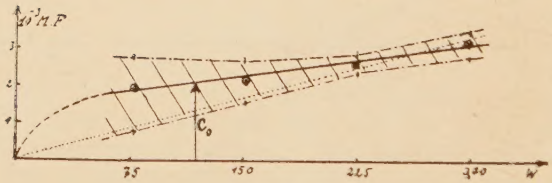

Fig. 10.

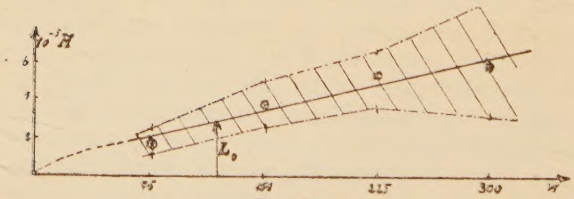

Fig. 11.

Lebenslauf.

Am 18. März 1887 bin ich zu Frankfurt a. M.-Bockenheim geboren, bestand Ostern 1906 an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. die Reifeprüfung und studierte darauf vier Semester in Göttingen Physik und Mathematik. Dann wandte ich mich nach München, arbeitete im Physikalischen Praktikum unter Exz. Röntgen und hörte besonders die anregenden Vorlesungen über theoretische Physik bei Herrn Prof. A. Sommerfeld, auf dessen Wunsch ich die vorliegende Untersuchung anstellte. Diese wurde im Institut für theoretische Physik ausgeführt. Herrn Prof. Sommerfeld bin ich für die Freigiebigkeit, mit der er mir experimentelle Hilfsmittel zur Verfügung stellte, und für sein förderndes Interesse an der Arbeit, vor allem bei ihrem Abschluß, zu großem Dank verpflichtet. Auch darf ich nicht versäumen, seinem früheren Assistenten, Herrn Prof. Debye in Zürich, hier für seine vielfache Unterstützung mit Rat und Tat herzlichst zu danken.